Pondichéry 17 avril 2015

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\,;\,c) = 1$.
   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33}-1) \div 3$	2863311530
$(2^{33}-1) \div 4$	2147483648
$(2^{33}-1) \div 12$	715827882,6

Il affirme que 3 divise $(2^{33}-1)$ et 4 divise $(2^{33}-1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33}-1)$.

a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.**?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33}-1)$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33}-1$.

d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + (2^3)^{10}$.

e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n-1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n-1}$
	Affecter à k la valeur $k+1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n-1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié?*

Liban 27 mai 2015

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.
Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n)?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n,
$Xn = M^n \times X_0$.

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b. Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer?*

Amérique du Nord 2 juin 2015

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix}20 & 10 & 11\\12 & 2 & 9\\42 & 20 & 21\end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(1 ; p), B(−1 ; q) et C(2 ; r).
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl}-3p+q+2r & \equiv & 0\,[6]\\3p-3q & \equiv & 0\,[6]\\6p+2q-2r & \equiv & 0\,[6]\end{array}\right.$$

2. En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl}q-r & \equiv & 0\,[3]\\p-q & \equiv & 0\,[2]\end{array}\right.$.

3. Réciproquement, on admet que si $\left\{\begin{array}{lcl}q-r & \equiv & 0\,[3]\\p-q & \equiv & 0\,[2]\\ \multicolumn{3}{l}{\text{A, B, C ne sont pas alignés}}\end{array}\right.$

alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.*

Centres étrangers 10 juin 2015

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
   $120 = 2^3 \times 15$.
   a. Donner la décomposition de l'entier 192.
   b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
   Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.
   c. En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

   On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,
   $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.
3. **a.** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b. En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.*

Polynésie 12 juin 2015

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme
   $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.

6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.*

Asie 16 juin 2015

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1+2+\ldots+n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1+2+3+4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. a. Montrer que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2 = 0$.
   b. En déduire que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2-8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\ ;\ y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.*

Antilles-Guyane 22 juin 2015

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b

Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	    Affecter à a le nombre b
	    Affecter à b la valeur de c
	    Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.
2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
   Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
   a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
   b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.
   c. Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.
   d. Décoder la lettre R.
2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.
   Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).
3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage?*

Métropole 22 juin 2015

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x - 5y = 1.$$

   a. Vérifier que le couple $(3 ; 4)$ est solution de (E).
   b. Montrer que le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.
   c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases} \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

- Lorsqu'on est en A :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

- Lorsqu'on est en B :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

- Lorsqu'on est en C :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

   a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

   b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

   c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

   On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

   On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

   On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

   a. Déterminer les nombres a_n, b_n, à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

   b. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

   c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?*

Métropole 9 septembre 2015

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points A$(0 ; 1 ; -1)$ et B$(-2 ; 2 ; -1)$.

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. a. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

   b. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.

On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u ; 1+u ; -1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ et passe par le point M.
4. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4 + 6u\,;\, 3 - 3u\,;\, -1)$.
5. **a.** Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.
   b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. **a.** Exprimer MN^2 en fonction de u.
   b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.*

Polynésie 9 septembre 2015

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geqslant 1 + n$.
   b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?
3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
   a. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
   b. On considère la proposition suivante :
   « Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,
   $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
   Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifier.
4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.
   a. Quels sont les diviseurs de n?
   b. En déduire que $S(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.
5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.
   a. Soit m un entier naturel.
   Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.
   b. Démontrer que $S(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.*

Antilles-Guyane 10 septembre 2015

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. **a.** Donner un couple solution $(x_0\,;\, y_0)$ de cette équation.
   b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1$ [26].
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on?*

Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne. Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.
On souhaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.
Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :

- Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
- Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
- Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tour entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avancés au début du mois n.
Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.
On pose $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. a. Justifier l'égalité $a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$ dans le contexte de l'exercice.

   b. Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a. Déterminer la matrice C qui vérifie l'égalité $C = AC + B$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = AV_n.$$

   c. On admet que pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$U_n = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4. a. On admet que pour tout entier $n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.
En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

b. En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme?*

Amérique du Sud 24 novembre 2015

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n,

$U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4. a. On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b. Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5. a. On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en conclure pour la population étudiée?

6. a. On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme. *

Nouvelle-Calédonie 5 mars 2016

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).
Exemple :
M correspond à $x = 12$
$7 \times 12 + 5 = 89$
Or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.
2. **a.** Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x\ [26]$ alors $15k \equiv x\ [26]$.
   b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
   c. En déduire que $y \equiv 7x + 5\ [26]$ équivaut à $x \equiv 15y + 3\ [26]$.
3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$.
On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,
$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$.

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.
Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.
Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.
Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ. *

Pondichéry 22 avril 2016

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.
Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$.
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.
   Justifier que N est l'inverse de M.
2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.
   On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\,;\,b)$ solutions de l'équation (E).
   a. Vérifier que le couple $(6\,;\,3)$ est une solution de (E).
   b. Montrer que le couple d'entiers $(a\,;\,b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
   En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
   En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

2. *Codage avec la matrice Q*

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que
$Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \to X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{OF.}$$

Le mot JE est codé en le mot OF.
Coder le mot DO.

3. *Procédure de décodage*
On conserve les mêmes notations que pour le codage.
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que
$Y = QX$.

a. Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 & \equiv & 3r_1 - 3r_2 \quad [26] \\ 3x_2 & \equiv & -5r_1 + 6r_2 \quad [26] \end{cases}$

b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 \quad [26] \end{cases}$

c. Décoder le mot SG.

Liban 31 mai 2016

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- On considère le système $\begin{cases} n & \equiv & 1 \quad [5] \\ n & \equiv & 3 \quad [4] \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

  Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.

  Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.

  Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.

- Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.

  Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.

On considère l'algorithme suivant :

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0 b prend la valeur 1

Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	    a prend la valeur $0,8a+0,3b$
	    b prend la valeur $1-a$
	Fin Pour

Sortie :	Afficher a Afficher b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.

Affirmation 3 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.*

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4+2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i}).$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.*

Amérique du Nord 1er juin 2016

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a. Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
   $$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1).$$
   b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :
   $$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$
   et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.
   Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.
3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :
   $$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

b. Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$.

Interpréter ces résultats.*

Centres étrangers 8 juin 2016

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1	On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.
Étape 2	On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :
Étape 3	On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.
Étape 4	On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.
Étape 5	On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2. Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Tableau de l'étape 2 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u \times a \equiv 1$ modulo 26.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :    a, u, et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)
TRAITEMENT :   Lire a
               u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
               Tant que r ≠ 1
                    u prend la valeur u + 1
                    r prend la valeur du reste de la division euclidienne de u × a par 26
               Fin du Tant que
SORTIE         Afficher u
```

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.

c. Démontrer que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 21x_1 & = & 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 & = & -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$
2. En utilisant la question B.2., établir que : $\begin{cases} x_1 & \equiv & 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{cases}$
3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.*

Polynésie 10 juin 2016

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**

   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. On considère la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

   $$u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20\,;\,n).$$

   Proposition 2

   La suite (u_n) est convergente.

3. **Proposition 3**

   Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.

   Pour tout entier naturel n, on note :

   — A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.

   — B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.

   — X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.

   Proposition 4

   La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

   Proposition 5

   Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.*

Métropole 20 juin 2016

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note pgcd(a, b) le plus grand diviseur commun de a et b.

Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.
   a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.
   b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.
Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.
   a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.
   b. En déduire que q divise n.
3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.
   a. On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.
   b. En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.
4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.
5. On donne l'algorithme suivant :

Antilles-Guyane 20 juin 2016

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \qquad \text{(E)}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x ; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1) ……………
                          (2) ……………
                          Alors Afficher X et Y
                          Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
   c. Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\ :\ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} & = & -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right.$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   - **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.
   - **b.** Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.
2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   - **b.** Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.
   - **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.*

Asie 23 juin 2016

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage, dite « chiffrement de Hill », dans un cas particulier. Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont des nombres entiers choisis entre 0 et 25, et tels que $ad - bc$ soit premier avec 26.
Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : quelques résultats

1. On considère l'équation (E) : $9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.
   - **a.** Donner une solution simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.
   - **b.** Démontrer que le couple $(d,\ m)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si :

   $$9(d-3) = 26(m-1).$$

   - **c.** En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de la forme :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} d & = & 26k+3 \\ m & = & 9k+1 \end{array}\right. ,\quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

2.
   - **a.** Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.
   - **b.** En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	Exemple : avec le mot MATH	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA	TH
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EGRY	

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour les lettres « ES », crypter le mot « ESPION ».

2. Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « ≡ »pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ modulo 26 car } 108 \equiv 4 \text{ modulo 26 et } 84 \equiv 6 \text{ modulo 26.}$$

Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.
On sait que si $x \equiv x'$ modulo 26 et $y \equiv y'$ modulo 26 alors :
$ax + by \equiv ax' + by'$ modulo 26.
Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2, et B et C sont deux matrices colonne 2×1, alors :

$$B \equiv C \text{ modulo 26 implique } AB \equiv AC \text{ modulo 26.}$$

a. Établir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.

b. Décrypter le mot : XQGY.

Métropole 12 septembre 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.
Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.
Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

```
Variables :       a, b, c, d, s sont des entiers naturels
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  c prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                    d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                    entre 1 et 6
                    Si d ⩽ 2
                        alors a prend la valeur 1 − a
                        sinon Si d ⩽ 4
                                alors b prend la valeur 1 − b
                                sinon c prend la valeur 1 − c
                              FinSi
                    FinSi
                    s prend la valeur a + b + c
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	c	s
initialisation						
1[er] passage boucle Pour						
2[e] passage boucle Pour						
3[e] passage boucle Pour						

b. Cet algorithme permet-il de savoir si, après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
- T_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$; $z_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

a. Donner les probabilités x_0 ,y_0, z_0 et t_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1, 2 ou 3 pièces du côté pile.

b. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches :

Antilles-Guyane septembre 2016

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.
On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours. Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.

2. Déterminer a_1 et b_1.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = DX_n + B.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = DY_n$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.

c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme?*

Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2016

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis.
Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes. pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.
   b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.
   En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Pour tout entier naturel n, on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.
4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.*

Amérique du Sud 24 novembre 2016

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, …sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \mod 3$.
   b. En déduire que $N_p \equiv p \mod 3$.
   c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$.
   On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

b. Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1 \bmod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c. Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».

e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \bmod 10$.

a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots\ [10]$										

b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \bmod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.*

Pondichéry 26 avril 2017

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites?

2. Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.

3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».
Qu'en penser?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.

2. Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

   b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$.

   b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Amérique du Nord 2 juin 2017

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.

D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014 + n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $U_0 = (150 \quad 0)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$.
3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.

   a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association?

   b. L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé?

2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4-c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

*

Liban 5 juin 2017

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$$

où a_1, a_2, …, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
  P prend la valeur 0
  R prend la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
I prend la valeur $I+R$
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7 :
  P prend la valeur $P+a_{2k}$
Fin Pour
S prend la valeur $I+P+c$
Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
  Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
Sinon :
  Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté?*

À rendre avec la copie

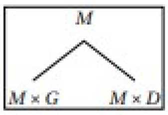
Exercice 4 – Question 1. a.
Candidats ayant sui l'enseignement de spécialité

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

Centres étrangers 13 juin 2017

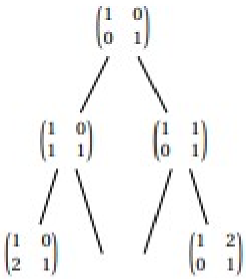
L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.
Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.
On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern- Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant :
$b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$. Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\dfrac{3}{5}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.
On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.
   a. Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.
   b. En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.
   On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.
4. Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.
5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\dfrac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant

```
VARIABLES :     m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
TRAITEMENT :    Tant que m ≠ n, faire
                    Si m < n
                        Afficher « Gauche »
                        n prend la valeur n − m
                    Sinon
                        Afficher « Droite »
                        m prend la valeur m − n
```

   a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		…	…	…	…
m	4	…	…	…	…
n	7	…	…	…	…

   b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Polynésie 14 juin 2017

Les parties A et B sont indépendantes.
Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

— À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.

— Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8?41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A
Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.
On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a+b & \equiv & 14 \quad [26] \\ \quad\ b & \equiv & 4 \quad [26]. \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ,\ b)$ ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.
   a. Coder les lettres K et X.
   b. Ce codage est-il envisageable?
2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.
   a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$m \equiv 9n + 4\ [26] \iff n \equiv 3m + 14\ [26]$$

   b. Décoder le mot AQ.

Antilles-Guyane 16 juin 2017

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.
   On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

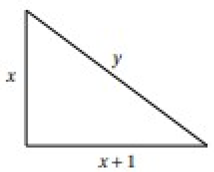
3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
   c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5. a. Vérifier que $2^4 \equiv 1$ [5].
   b. En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
   c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

Métropole 21 juin 2017

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.
Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3\ ;5)$.

3. a. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
   b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Soient x et y deux entiers naturels; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   a. Montrer que : $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.
   b. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'\ ;\ y')$ définit également un TRPI.

2. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par
   $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ définit un TRPI.

3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017. *

Asie 22 juin 2017

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.
On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$.

1. **a.** Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que : $A = PDP^{-1}$.

   c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

   $$A^n = PD^nP^{-1}.$$

   d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

1	$X0 := [[1], [0]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	M
2	$P := [[1, 1], [1, -1]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	M
3	$D := [[1, 0],[0, 2*p-1]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2*p-1 \end{bmatrix}$	M
4	$P*(D\hat{}n)*P\hat{}(-1)*X0$	
	$\begin{bmatrix} \dfrac{(2*p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2*p-1)^n+1}{2} \end{bmatrix}$	M

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission?

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires

   a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

   b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
   Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

   - la valeur de c_1 est inchangée ;
   - la valeur de c_2 est modifiée ;
   - la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
   Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit de contrôle calculé \ Bit erroné	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.
5. Voici deux messages de 7 bits :

$$A = 0100010 \quad \text{et} \quad B = 1101001.$$

On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.
Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.*

Antilles-Guyane 7 septembre 2017

1. Soit p un entier relatif donné.
   On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p)

$$3x + 4y = p$$

où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   a. Vérifier que le couple $(-p\ ;\ p)$ est une solution particulière de l'équation.
   b. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme
   $(-p + 4k\ ;\ p - 3k)$ où k est un entier relatif.

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne

$$6x + 8y - z = 0.$$

2. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ qui appartient au plan $\mathscr{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.
   a. Démontrer que z_0 est pair.
   b. On pose $z_0 = 2p$ où p est un entier relatif.
   Prouver que le couple $(x_0\ ;\ y_0)$ est solution de l'équation (E_p).
   c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ à coordonnées entières.
3. À tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   a. Montrer que $6x' + 8y' - z' = 101(6x + 8y - z)$.
   b. En déduire que si le point M est un point du plan $\mathscr{P}$, alors le point M' est aussi un point du plan $\mathscr{P}$.
   c. Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par O.
   Montrer que si le point M appartient à Δ, alors le point M' appartient aussi à Δ.

*

Métropole 12 septembre 2017

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A$(1\ ;\ 5\ ;\ -2)$, B$(7\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et C$(-2\ ;\ 7\ ;\ -2)$ et on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice
$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.

En déduire que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne :
$10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation
$(E) : 2x + 3y = 11$.

b. Justifier que le couple $(7\,;\,-1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

a. Montrer que y est impair.

b. Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.

c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
Montrer que le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.

d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.

Amérique du Sud 21 novembre 2017

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S).
Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.
Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

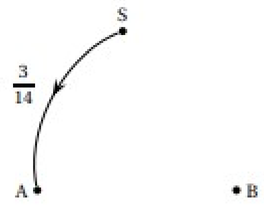
- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6; il devient joueur solitaire avec une probabilité de 0,25. Sinon, il rejoint l'équipe B;
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\frac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.
On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après n jours de jeu.
On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1. On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant. Justifier que $p = \frac{3}{14}$.

2. **a.**

Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.



b. On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.

Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = U_0 T^n$.

c. Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3. On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

a. Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on?

b. En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4. On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

a. Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

b. Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2017

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 1000 \\ c_0 & = & 1500 \\ b_{n+1} & = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} & = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{array} \right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1er juin de l'année $2000 + n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

   a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

   b. On admet que $A = PTQ$.
   Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a

$$A^n = PT^nQ.$$

   c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.
Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols?

Initialisation :	N prend la valeur 0
	B prend la valeur 1 000
	C prend la valeur 1 500
Traitement :	Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
	N prend la valeur $N + 1$
	R prend la valeur B
	B prend la valeur $0,3R + 0,5C$
	C prend la valeur $-0,5R + 1,3C$
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher N

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \\ 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \end{pmatrix}$$

et

$$n \leqslant 10 \times 1,1^n.$$

   a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).

   b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
   À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent?