LA FONCTION EXPONENTIELLE - L'ESSENTIEL DU COURS

Définition et notation :

Il existe **une unique** fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f' = f$ et $f(0)=1$

Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**

Attention : il y a deux conditions

Notation e^x :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \approx 2{,}718$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$

  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Lien avec les suites géométriques :

Pour tout réel a, la suite $\left(e^{na}\right)$ est une suite géométrique de raison e^a.

Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive …

Étude de la fonction exponentielle :

Pour tout réel x, $e^x > 0$. La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

*Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "**croissance exponentielle**", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide. C'est le cas en ce moment avec la covid-19.*

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

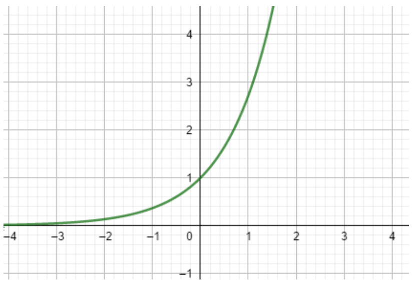
Conséquences :

Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées (0;1) et (1; e)
- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- L'axe des abscisse est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$



Croissance comparée :

Pour tout entier naturel n, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

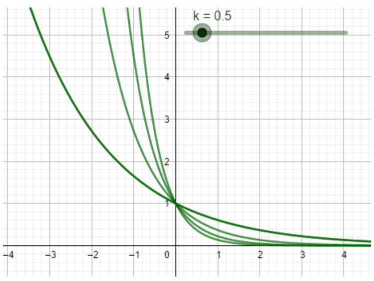
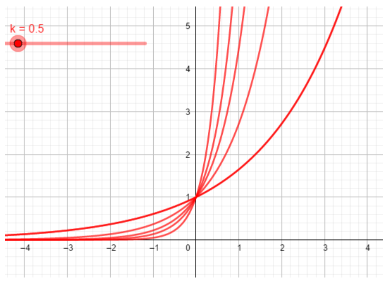
- En prenant n=0, on retrouve $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- En prenant n=1, on obtient une limite importante $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Fonction du type $f(x) = e^{u(x)}$:

Dérivée : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ (dérivable sur le même ensemble que u)

Exemples importants :

Soit k un réel strictement positif.

$f_k : x \longmapsto e^{-kx}$	$g_k : x \longmapsto e^{kx}$
 Décroissance exponentielle	 Croissance exponentielle