Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Ex 9-1 : ***Vrai ou faux ?***

Soit la droite $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3t\\z=2-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) d passe par $A(-1;0;2)$

2) d a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

3) d passe par $B(1;-3;-1)$

4) d a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

5) d est parallèle à $d':\begin{cases}x=3-2k\\y=1+3k\\z=k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$

6) d coupe l'axe des ordonnées.

7) d coupe l'axe des cotes au point $C(3;-6;0)$.

Ex 9-2 : ***Éléments caractéristiques***

Donner les éléments caractéristiques des droites suivantes :

1) $d:\begin{cases}x=2t\\y=2-3t\\z=2-6t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

2) $d':\begin{cases}x=3t-4\\y=1-3t\\z=-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Ex 9-3 : ***Droite, segment, demi-droite***

Soit $A(2;1;4)$, $B(1;0;-2)$, $C(-2;0;0)$ et $D(0;5;6)$
Donner des représentations paramétriques de la droite (AB), du segment [CD] et de la demi-droite [BC).

Ex 9-4 : ***Appartient ou pas ?***

Soit $d:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+2t\\z=-3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Dire si les points suivants appartiennent ou pas à la droite d :
$A(2;-1;-3)$

$B(0;-3;6)$

$C(1;-3;3)$

$D(3;1;-3)$

Ex 9-5 : ***Droites sécantes ?***

Soit $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2-t\\z=2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1-2s\\y=-s\\z=-1+s\end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$

1) Montrer que d et d' ne sont pas parallèles.

2) Donner deux points A et B de la droite d .

3) Donner deux points C et D de la droite d' .

4) Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

5) Que peut-on en déduire pour ces deux droites ?

Ex 9-6 : ***Avec le centre de gravité***

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(2;1;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle OBC.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).

3) Quelle est la valeur du paramètre correspondant à chacun des points suivants :

a) A ?

b) le milieu M de [AG] ?

c) le symétrique S de M par rapport à A ?

Ex 9-7 : ***Avec le milieu d'un segment***

1) Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(6;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite d' passant par le point $B(3;-3;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

3) Montrer qu'il existe $C \in d$ et $D \in d'$ tels que le milieu de [CD] soit le point $I(1;-2;3)$.

Ex 9-8 : ***Droites confondues***

Soit $d : \begin{cases} x=-1-5t \\ y=-3+t \\ z=4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x=9+10t \\ y=-5-2t \\ z=-8-8t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' sont confondues.

Ex 9-9 : ***Droites strictement parallèles***

Soit $d : \begin{cases} x=-1-3t \\ y=-3+t \\ z=2-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x=1-9t \\ y=-1+3t \\ z=3-6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.

Ex 9-10 : ***Droites sécantes***

Soit $d : \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=3+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' sont sécantes.

Ex 9-11 : ***Droites non coplanaires***

Soit $d : \begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=1+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ z=8-3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

Ex 9-12 : ***Droites concourantes et coplanaires***

On considère les droites :

$d_1 : \begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $d_2 : \begin{cases} x=-2+4t \\ y=1+4t \\ z=1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d_3 : \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+5t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

Dire que 3 droites sont **concourantes** signifie qu'elles se coupent en un même point, et non qu'elles se coupent 2 à 2 !

2) a) Ces droites sont-elles coplanaires ?

b) Peut-on dire que trois droites concourantes sont toujours coplanaires ?

Ex 9-13 : ***Minimum d'une fonction pour déterminer le projeté orthogonal***

Soit $d : \begin{cases} x=2+t \\ y=-3-4t \\ z=1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=4+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2) Montrer que $\mathrm{B}(-1;2;3)$ n'appartient pas au plan défini par les droites d et d' .

3) À tout point M de paramètre t de d , on associe la fonction f définie par $f(t)=\text{BM}^2$.
Calculer $f(t)$ et déterminer la valeur t_0 pour laquelle $f(t)$ est minimale.
Que représente le point H de paramètre t_0 de d ?

<u>Ex 9-14 :</u> ***Droites orthogonales mais pas perpendiculaires***

Soit $\text{A}(-1;0;2)$, $\text{B}(1;1;3)$, $\text{C}(-2;1;4)$ et $\text{D}(0;1;0)$.
1) Donner une représentation paramétrique de (AB), puis de (CD).

2) Montrer que ces deux droites sont orthogonales, mais pas perpendiculaires.

<u>Ex 9-15 :</u> ***Droites perpendiculaires et donc orthogonales***

Soit $\text{A}(-1;1;3)$, $\text{B}(2;-1;-2)$, $\text{C}(0;1;-4)$ et $\text{D}(2;-1;-2)$.
1) Donner une représentation paramétrique de (AB), puis de (CD).

2) Montrer que ces deux droites sont perpendiculaires et déterminer leur point d'intersection.

Équations de plans

Ex 9-16 : ***Vrai ou faux***

Soit le plan $P: x-2y+z-2=0$.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal

4) P passe par $A(0;0;2)$

Ex 9-17 : ***Équation cartésienne d'un plan : point et vecteur normal***

Dans chacun des cas, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) $A(2;-1;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

2) $A(1;5;0)$ et $\vec{n}=\vec{i}-2\vec{j}$

Ex 9-18 : ***Équation cartésienne d'un plan : trois points***

Soit les points $A(1;5;0)$, $B(2;0;-1)$ et $C(0;3;4)$.

1) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

2) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Ex 9-19 : ***Projeté orthogonal***

Soit le plan $P: -5x+y-z-6=0$ et le point $A(-6;2;-1)$.
Démontrer que $B(-1;1;0)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P.

Position relative de deux plans

Ex 9-20 : ***Plans perpendiculaires***

Dans chacun des cas, après avoir déterminé des vecteurs normaux aux plans P et Q, déterminer leur position relative :

1) $P: -x-y+2z-5=0$ et $Q: 2x+4y-3z=0$

2) $P: x-2y+z-4=0$ et $Q: -3x+y-4z-2=0$

3) $P: x-2y+3=0$ et $Q: 2x+y-3z-5=0$

4) $P: x=-1$ et $Q: z=2$

Ex 9-21 : ***Intersection de deux plans***

Dans chacun des cas, démontrer que les plans P et Q sont sécants, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection puis donner un vecteur directeur de cette droite.

1) $P: 2x-3y+z-4=0$ et $Q: x+2y-z+1=0$

2) $P: x-3y+2z-5=0$ et $Q: 2x+y+7z-1=0$

Ex 9-22 : ***Plans parallèles***

Soit les plans $P: -2x+4y-3z+2=0$ et $Q: x-2y+\frac{3}{2}z-5=0$.

1) Montrer que les plans P et Q sont parallèles.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan R parallèle au plan P et passant par le point $A(-2;0;3)$

Position relative d'une droite et d'un plan

Ex 9-23 : ***Vrai ou faux***

Soit la droite $d: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan $P: 2x-y-3z+10=0$

1) d et P sont parallèles

2) d et P sont perpendiculaires.

3) Leur point d'intersection a pour paramètre $t=0$ sur la droite.

4) Leur point d'intersection a pour coordonnées $B(-1;-1;3)$

Ex 9-24 : ***Intersection d'une droite et d'un plan***

Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du point d'intersection, quand il existe, de la droite d et du plan P :

1) $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $P: 5x-y+2z=0$

2) $d:\begin{cases} x=1-2k \\ y=1+k \\ z=3k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ et $P: x-y+z+1=0$

3) $d:\begin{cases} x=1+s \\ y=2+s \\ z=s \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$ et $P: x+y-2z-3=0$

4) $d:\begin{cases} x=1-s \\ y=2+s \\ z=3s+9 \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$ et $P: z=0$

Ex 9-25 : ***Étudier la position relative d'une droite et d'un plan***

Soit les points $A(0;-1;-1)$ et $B(1;0;0)$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Étudier la position relative de cette droite avec chacun des plans
$P: -3x+y+2z+3=0$, $Q: 2x-3y+z-3=0$ et $R: -x+2y-3z+3=0$

Intersection de deux droites

Ex 9-26 : ***Droites sécantes***

Soit les droites $d:\begin{cases}x=-1\\y=1-t\\z=1-2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=4-5t\\y=3-2t\\z=-1+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) Démontrer que les droites d et d' sont sécantes.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

Ex 9-27 : ***Droites parallèles***

Soit les droites $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=3+2t\\z=1-2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1+2t\\y=5-t\\z=-1+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) Démontrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.

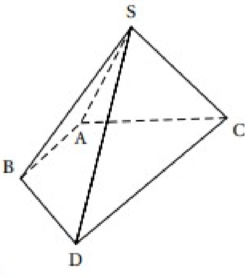
2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 28 : ***Baccalauréat – Asie 10 juin 2024 – ex 2***

Equations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – produit scalaire – projeté orthogonal – volume d'un tétraèdre à base trapèze.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; −1 ; 1); B(4 ; −1 ; 0); C(0 ; 3 ; 2); D(4 ; 3 ; −2) et S(2 ; 1 ; 4).
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; −1) et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule
   $$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$
   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

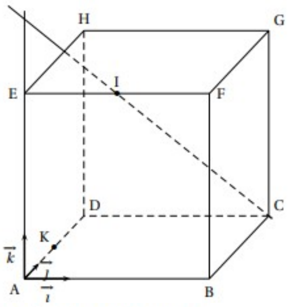
Ex 29 : *Baccalauréat S – Métropole 19 juin 2024 J1 (secours) – ex 1*

Equations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – produit scalaire – égaliser volumes d'un tétraèdre pour trouver une aire – droite incluse dans un plan

On considère un repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points

$$B(4;0;0), \quad D(0;4;0), \quad E(0;0;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 4t \\ z & = & 4-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :
   $$x+2y-2z-4=0.$$
   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}\,;\,\frac{20}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.
   Que représente J par rapport à C?
   c. Vérifier que le point K(0; 2; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.
   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).
4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{B\times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
   a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.
   b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
   c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.
   d. On note I′ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I′ C) passant par G.
   Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Ex 30 : ***Baccalauréat – Amérique du Sud 21 novembre 2024 – ex 4***

Equations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – produit scalaire – droites non coplanaires – distance entre deux droites non coplanaires

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\,;\ 2\,;\ -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.
4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.
   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\ -\frac{5}{3}\,;\ -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\,;\ -\frac{4}{3}\,;\ -1\right)$.

5. **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

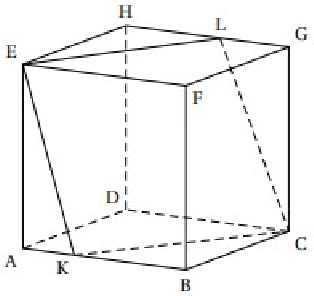
   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Ex 31 : ***Baccalauréat – Polynésie 5 septembre 2024 – ex 4***

Equations de plans – paramètre – caractériser un quadrilatère (parallélogramme, rectangle …) – produit scalaire – angle à déterminer

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L(1-m\,;\,1\,;\,1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L(1 ; 1 ; 1) est confondu avec le point G, le point K(0; 0; 0) est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).
   - **a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).
   - **b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.
   - **a.** Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.
   - **b.** Justifier que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE} = m(m-1)$.
   - **c.** Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.
4. Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$.Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.
   - **a.** Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.
   - **b.** À l'aide de la question **3. b.**, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.