8 : Logarithme népérien : exercices - page 1

Définition - propriétés algébriques

Ex 8-1 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) Équations ...

a) e^3 est la solution de l'équation $\ln x=3$

b) e^{-3} est la solution de l'équation $\ln x=-3$

c) $\ln(3)$ est la solution de l'équation $e^x=3$

d) $\ln(-3)$ est la solution de l'équation $e^x=-3$

e) $-\ln 3$ est la solution de l'équation $e^x=\dfrac{1}{3}$

f) L'équation $\ln x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=e^m$

g) L'équation $e^x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=\ln m$

2) Formules ...

a) $\ln(a+b)=\ln(a)\times\ln(b)$

b) $\ln(ab)=\ln(a)\ln(b)$

c) $\ln(a-b)=\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3) $\ln(ab^5)=$ ...

a) $5\ln(ab)$

b) $5(\ln(a)+\ln(b))$

c) $5\ln(a)\ln(b)$

d) $\ln(a)+5\ln(b)$

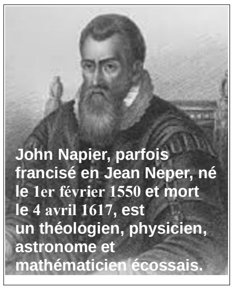
4) $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right)=$ ...

a) $-(\ln(a))^2$

b) -1

c) $-2\ln(a)$

d) 0



John Napier, parfois francisé en Jean Neper, né le 1er février 1550 et mort le 4 avril 1617, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

5) la moitié de $\ln(a)$ est ...

a) $\ln(a)-\ln(2)$

b) $\ln(a^{-2})$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $\sqrt{\ln(a)}$

Ex 8-2 : ***Calculs avec les formules***

Simplifier :

1) $e^{\ln(2)}-e^{\ln(7)}$

2) $3e^{\ln(5)}+5e^{-\ln(3)}$

3) $\ln(2\sqrt{3})+2\ln(\sqrt{3})$

4) $\ln\left(\dfrac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$

5) $\dfrac{\ln(125)}{\ln(25)}$

6) $\dfrac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$

7) $\ln(1+e^x)-x-\ln(1+e^{-x})$

Ex 8-3 : ***Équations et inéquations***

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $(e^{x}-2)(e^{2x}-8)=0$

2) $(e^{x-1}-3)^{2}=0$

3) $(e^{x^{2}+2x+5}+e^{-x})(3e^{x}+4)=e$

4) $8-4e^{\ln(0,5)\times x+1}>0$

5) $e^{3x+5}<3e^{x}$

6) $(2e^{x}-10)(5-e^{x})<0$

Ex 8-4 :

Compléter …
1) La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point

A(ln2 ; …) et B(… ; π)

2) L'ensemble des réels x tels que $\ln(x)\leqslant 0$ est …

3) Si $e^a=b$ $(b>0)$, alors ln(…) = …

4) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(e^x)=x$

5) $\forall$ x $\in$ … , $e^{\ln(x)}=x$

6) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(x)>0$

Ex 8-5 : ***Calculs***

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$:

a) $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$

b) $\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)$

c) $\frac{\ln 64}{\ln 81}+\frac{\ln 49}{\ln 7}$

2) Simplifier :

a) $4\ln(e^2)+\ln(\sqrt{e})$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^3}\right)$

c) $\frac{\ln(e^4)}{(\ln(e^3))^2}$

3) Calculer :

a) $\ln 3+\ln 9+\ln 27$

b) $\ln(\sqrt{5}-2)+\ln(\sqrt{5}+2)$

Ex 8-6 : ***Vrai ou faux***

Justifier
1) $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\ln(x^3)=3\ln(x)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(1+e^x)=x+\ln(1+e^{-x})$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(1+e^{8x})-4x=\ln(e^{4x}+e^{-4x})$

Étude de la fonction logarithme népérien

Ex 8-7 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) L'ensemble de définition de la fonction ln est :

a) $[1;+\infty[$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^-$ e) $\mathbb{R}^{+*}$ f) $]0;+\infty[$

2) La fonction ln :

a) est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
c) est strictement positive sur $]1,+\infty[$.
d) est égale à sa dérivée.
e) prend la valeur 1 en 0.

3) Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

a) La droite $\Delta : y=0$ est une asymptote à C .
b) C coupe l'axe des abscisses.
c) C admet une tangente de coefficient directeur -2.
d) C et la courbe de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $d : y=x$.

Ex 8-8 : *Limites*

Associer chaque limite au résultat qui convient :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$ •	• 1
$\lim\limits_{x \to 0+} x^n \ln x \quad n \in \mathbb{N}^*$ •	• $+\infty$
$\lim\limits_{x \to 0+} \ln x$ •	• 0
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ •	• n'existe pas
$\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ •	• $-\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$ •	• -1

Ex 8-9 : *Déterminer une limite*

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{3}{x} - 4x - 3x^2 \ln x \right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x^3 - \dfrac{5 \ln x}{x^5} \right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln x - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

4) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\ln x - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x + \ln x)^2$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(3 - e^x)$

8) $\lim\limits_{x \to \ln 3^-} \ln(3 - e^x)$

9) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\ln(x-1)\left(\ln 2 - \dfrac{1}{x}\right)\right)$

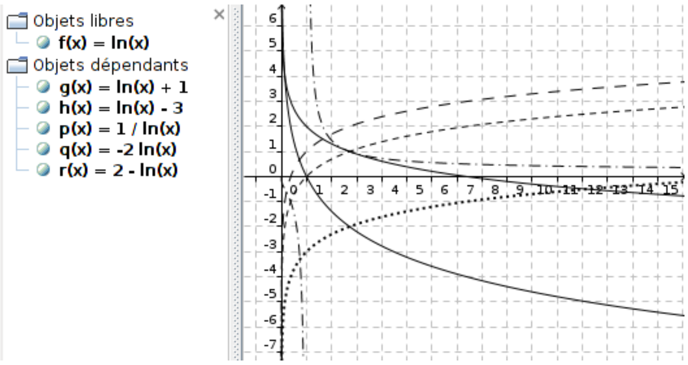
10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(x-1)\left(\ln 2 - \dfrac{1}{x}\right)\right)$

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{3x-6}{7x}\right)$

12) $\lim_{x \to 2^+} \ln\left(\frac{3x-6}{7x}\right)$

Ex 8-10 : ***A partir de la courbe représentative de la fonction ln***

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 8-11 : ***Variations sans calculer la dérivée***

Soit les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\ln(x)+\ln(2)$, $g(x)=\frac{\ln(x)}{5}$ et $h(x)=1-3\ln(x)$

Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions à partir de celui de la fonction ln.

Ex 8-12 : ***Dérivées***

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

1) $f(x)=\frac{3x}{\ln(x)}$ sur $I=]1;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln(x)-\ln(3)$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ sur $I=]e;+\infty[$

4) $f(x)=(\ln x)^2-\dfrac{1}{\ln x}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

<u>Ex 8-13 :</u> ***Tangente à la courbe***

Déterminer les coordonnées du point de la représentation graphique C de la fonction ln en lequel la tangente T a pour coefficient directeur 2.

<u>Ex 8-14 :</u> ***Signe d'une fonction grâce au sens de variation***

Dans chaque cas, déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) $f(x)=2x^2-\ln x$

2) $f(x)=x\ln x+\mathrm{e}$

Ex 8-15 : ***Déterminer une limite comportant une forme indéterminée***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 - 3x \ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x^3 - 5x \ln x\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln 2}{x} + \ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{2x}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((\ln x)^2 - 3 \ln x + 2\right)$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x + 5\right)}{e^x}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x - e \ln x\right)$

8) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(3x - e \ln x\right)$

9) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x) - 5x}{1+x}$

10) $\lim_{x \to -1^+} \frac{\ln(1+x) - 5x}{1+x}$

11) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

12) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

<u>Ex 8-16 :</u> ***Déterminer une limite avec le nombre dérivé***

Déterminer $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h}$ et $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(3x-2)}{x-1}$

<u>Ex 8-17 :</u> ***Inéquations comportant*** q^n

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Déterminer le plus petit entier n tel que :

1) $3 \times \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0,01$

2) $1-1,25^n<0,99$

B) On sait que le nombre d'atomes de carbone 14, en fonction du nombre n de siècles, est donné approximativement par $q_n=q_0\,0,987976^n$, où q_0 est le nombre initial d'atomes.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des atomes de carbone 14 s'est désintégrée)

2) Déterminer l'âge des fragments trouvés par des archéologues, sachant que la teneur en carbone 14 est égale à 30 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse pris comme témoin.

Ex 8-18 : ***Avec des suites***

Soit u la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1) Déterminer la limite de la suite u .

2) $\forall n\neq 0$, on note $S_n=\sum_{i=1}^{n} u_i$

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) En déduire la limite de S_n .

Fonctions du type $x : \longmapsto \ln(u(x))$

Ex 8-19 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(u(x)) > 0$

2) La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

3) La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$

4) $\lim_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

5) $\ln(u(x)) \geqslant \ln 5 \Leftrightarrow x \geqslant 5$

6) $\ln(u(x)) \leqslant 5 \Leftrightarrow 0 < u(x) \leqslant e^5$

Ex 8-20 : ***Résoudre une équation ou une inéquation comportant*** $\ln(u(x))$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-5) = \ln 4$

2) $\ln(2x-5) = -3$

3) $\ln(7x+2) \geqslant \ln(3-x)$

4) $\ln(e^{2x}-25) \geqslant 0$

5) $\ln((x+1)(x-2)) \geqslant \ln 18$

6) $\ln(1-x^2)-\ln(x-3)\geqslant 0$

Ex 8-21 : ***Signe d'une fonction***

Étudier le signe des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(x-3)\ln(x-1)$ définie sur $]1;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln(x-1)}$ définie sur $]1;2[\cup]2;+\infty[$

3) $h(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-3}{e^x-1}\right)$ définie sur $]1;2[\cup]2;+\infty[$

Ex 8-22 : ***Ensemble de définition***

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x)=\ln(x^2)-3$

2) $f(x)=\ln(e^x-1)$

3) $f(x)=\ln(x^2-3)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+2)}$

5) $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Ex 8-23 : ***Tableau de variations***

Donner le tableau de variations des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(\ln x)^2-\ln(x^2)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;1[$

3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ sur $I=\mathbb{R}$

Ex 8-24 : Avec Xcas

Soi f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)$

```
1  f(x):=2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)
       x -> 2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)
2  deriver(f(x),x);
       -2*x*ln(x^2+1)+2*x
3  a:=f(sqrt(e-1));simplifier(a);b:=f(sqrt(e^2-1));simplifier(b)
       (-exp(1)+2*(exp(1)-1), exp(1)-2, -2*exp(2)+2*(exp(2)-1), -2 )
4  solve(f(x)=0);
       "Unable to isolate x in -ln(x^2+1)*x^2-ln(x^2+1)+2*x^2
5  nSolve(f(x)=0,x=0);nSolve(f(x)=0,x=2)
       ( 0.0, 1.9802913 )
```

Répondre aux questions ci-dessous, en utilisant les résultats ci-dessus fourni par le logiciel de calcul formel Xcas.

1) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α .
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .

3) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction logarithme décimal

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x=10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x=100$, la valeur 3 lorsque $x=1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k\times\ln x$ avec $k=\dfrac{1}{\ln 10}$, il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative . les formules sont identiques à celles de la fonction logarithme népérien :

$\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log(a\times b)=\log a+\log b$, $\log\dfrac{1}{a}=-\log a$, $\log\dfrac{a}{b}=\log a-\log b$,
$\log\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\log a$ et $\log a^n=n\log a$

<u>Ex 8-25 :</u> ***Vrai ou faux***

1) $\log(\mathrm{e})=1$

2) $\log(10^{-5})=-5$

3) $\log(10^2\times 10^3)=5$

4) $\log(x)<1 \iff 0<x<10$

5) $\log(x)=-3\log(5) \iff x=\dfrac{1}{125}$

6) $(\log(x))'=\log(\mathrm{e})\ln(x)$

<u>Ex 8-26 :</u> ***Niveau sonore***

Le niveau sonore N d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par $\mathrm{N}=10\log\left(\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I_0}}\right)$, où I est l'intensité sonore exprimé en W/ m^2 , et où $\mathrm{I_0}$ est l'intensité de référence correspondant à la plus petite intensité acoustique audible.

On sait que, lorsqu'on met en présence plusieurs sources sonores, les intensités s'additionnent.

1) Le niveau sonore d'un lave-linge est de 50 dB.
Quel est le niveau sonore de deux lave-linges identiques ?
Le niveau sonore a-t-il doublé ?

2) Le niveau sonore d'une note de musique obtenue au violon est de 70 dB . Combien faut-il de violonistes jouant ensemble la même note, pour obtenir un niveau sonore de 80 dB ?

3) Le niveau sonore d'un marteau-piqueur est de 110 dB et celui d'un klaxon de voiture est de 80 dB. Quel est le niveau sonore des deux bruits réunis ? Que remarque-t-on ?

Ex 8-27 : *Algorithme de Briggs*

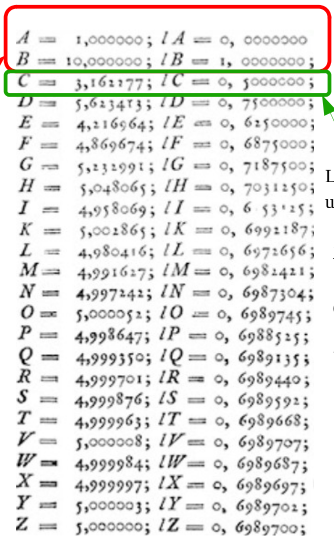
Dans introduction à l'analyse infinitésimale (1748), Euler explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de log(5).

Ses calculs sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Les calculs sont initialisés par

$A=1$, $B=10$,

$lA=0$ et $lB=1$.



$A = 1{,}000000$;	$lA = 0{,}0000000$
$B = 10{,}000000$;	$lB = 1{,}0000000$;
$C = 3{,}162277$;	$lC = 0{,}5000000$;
$D = 5{,}623413$;	$lD = 0{,}7500000$;
$E = 4{,}216964$;	$lE = 0{,}6250000$;
$F = 4{,}869674$;	$lF = 0{,}6875000$;
$G = 5{,}232991$;	$lG = 0{,}7187500$;
$H = 5{,}048065$;	$lH = 0{,}7031250$;
$I = 4{,}958069$;	$lI = 0{,}6\ 53125$;
$K = 5{,}002865$;	$lK = 0{,}6992187$;
$L = 4{,}980416$;	$lL = 0{,}6972656$;
$M = 4{,}991627$;	$lM = 0{,}6982421$;
$N = 4{,}997242$;	$lN = 0{,}6987304$;
$O = 5{,}000052$;	$lO = 0{,}6989745$;
$P = 4{,}998647$;	$lP = 0{,}6988525$;
$Q = 4{,}999350$;	$lQ = 0{,}6989135$;
$R = 4{,}999701$;	$lR = 0{,}6989440$;
$S = 4{,}999876$;	$lS = 0{,}6989592$;
$T = 4{,}999963$;	$lT = 0{,}6989668$;
$V = 5{,}000008$;	$lV = 0{,}6989707$;
$W = 4{,}999984$;	$lW = 0{,}6989687$;
$X = 4{,}999997$;	$lX = 0{,}6989697$;
$Y = 5{,}000003$;	$lY = 0{,}6989702$;
$Z = 5{,}000000$;	$lZ = 0{,}6989700$;

La méthode de Briggs utilise la relation

$\log(\sqrt{AB}) = \frac{1}{2}(\log(A)+\log(B))$

$C=\sqrt{AB}$ et

$lC = \frac{1}{2}(lA+lB)$

Pour la suite des calculs, on procède de la façon suivante et on considère uniquement les variables A et B:

- si $\sqrt{AB} \leqslant 5$, alors :

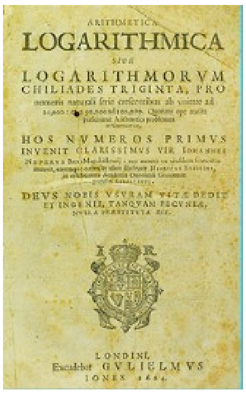
A prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lA prend la valeur $\dfrac{lA+lB}{2}$

- si $\sqrt{AB} > 5$, alors :

B prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lB prend la valeur $\dfrac{lA+lB}{2}$

Ce qui donne :

A= 3.1622776601683795	lA= 0.5
B= 5.623413251903491	lB= 0.75
A= 4.216965034285822	lA= 0.625
A= 4.869675251658631	lA= 0.6875
B= 5.232991146814947	lB= 0.71875
B= 5.0480657166674705	lB= 0.703125
A= 4.958068241684655	lA= 0.6953125
B= 5.002864610575233	lB= 0.69921875
A= 4.980416061248411	lA= 0.697265625
A= 4.991627716362686	lA= 0.6982421875
A= 4.99724300503361	lA= 0.69873046875
B= 5.00005301775164	lB= 0.698974609375



1) Vérifier les 4 premières lignes de calcul.

2) Compléter l'algorithme suivant écrit en Python, afin qu'il applique l'algorithme de Briggs pour le calcul de $\log(x)$ où x est un réel compris entre 10 et 100 avec une précision de 10^{-k} .
On initialisera l'algorithme avec :

A=10, B=100, lA=1 et lB=2

```
from math import *

def CalculeLog_x( x, k ):
    A = ...........
    B = ...........
    lA = ...........
    lB = ...........
    precision = 10**(...........)
    while (B - x > ........... ):
        if (sqrt(A * B) < ......):
            ...... = sqrt(A*B)
            ...... = 1/2*(lA + lB)
        else:
            ...... = sqrt(A*B)
            ...... = 1/2*(lA + lB)
    return lB
```

3) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de log(85)

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 8-28 : *Baccalauréat - Amérique du Nord - sujet 1 21 mai 2024 – ex 3*

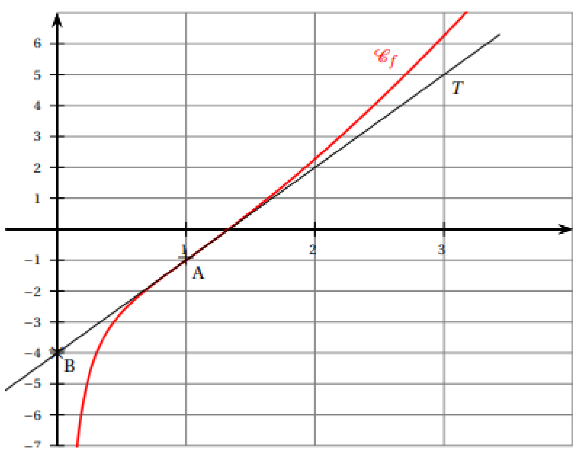
Fonction ln – nombre dérivé – convexité – limite – corollaire du TVI

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0\,;-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :
   $$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Ex 8-29 : *Baccalauréat - Asie - sujet 2 29 11 juin 2024 – ex 1*

Fonction ln – convexité – fonction auxiliaire – limite – suites – récurrence – point fixe

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

Ex 8-30 : *Baccalauréat - Métropole - sujet 1 secours 19 juin 2024 – ex 3*

Fonction ln – limites – suites – récurrence – python

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
5. a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u =7
    while ... :
        n = n+1
        u = ...
    return n
```

   b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Ex 8-31 : ***Baccalauréat - Polynésie - sujet 2 57 20 juin 2024 – ex 3***

Fonction ln – suites – python – récurrence – point fixe

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif a, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de a.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u – log( u / 4 )
    return S
```

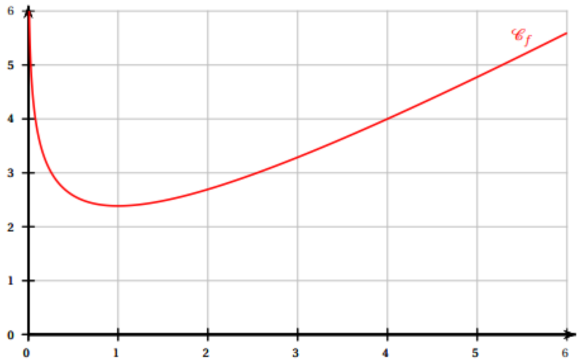
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0 ; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.