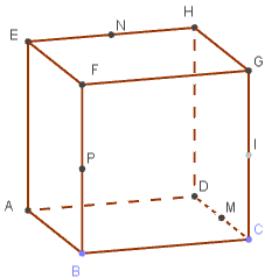


Produit scalaire dans l'espace

Pour les exercices 1 à 4, on considère le cube ci-dessous de côté  $a$ .

M, N, P et I sont les milieux respectifs de [CD], [EH], [BF] et [CG].



Ex 7-1 : Vrai ou faux

1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$

2)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$

3)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GE}$

4)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

5)  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{FH}^2$

6)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$

7)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = a^2 \sqrt{6}$

8)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 2a^2$

9)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{0}$

10)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

11)  $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

4)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$

Ex 7-3 : Calculer en utilisant un repère ...

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont des vecteurs unitaires respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AE}$ . Calculer :

1)  $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{PN}$

2)  $\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{PM}$

3)  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$

Ex 7-2 : Calculer en projetant ...

Calculer en projetant orthogonalement l'un des vecteurs sur la droite portant l'autre vecteur ou éventuellement sur un plan contenant l'autre vecteur.

1)  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG}$

2)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PG}$

3)  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DI}$

Ex 7-4 : Trouver un angle

En calculant de deux façons différentes le produit scalaire  $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DI}$ , déterminer  $\cos \widehat{NDI}$ , et déduire une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\widehat{NDI}$ .

On peut utiliser le repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont des vecteurs unitaires respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AE}$ .

On peut même pour simplifier se placer dans un cube de côté 1. Ce qui ne change rien car dans un agrandissement ou une réduction, les angles ne sont pas modifiés.

**Ex 7-6 : Triangle isocèle**

Soit  $M(3;-4;-2)$ ,  $N(-1;3;2)$  et  $P(7;-1;3)$

Démontrer que  $MNP$  est isocèle et déterminer à  $10^{-1}$  près tous les angles du triangle.

Pour les exercices 5 à 8, l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Ex 7-5 : Triangle rectangle**

Soit  $A(3;4;-2)$ ,  $B(1;6;0)$  et  $C(-2;2;1)$

Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle et indiquer en quel point.

**Ex 7-7 : Parallélogramme**

Soit  $E(-3;2;1)$ ,  $F(1;-1;3)$ ,  $G(5;1;-3)$  et  $H(1;4;-5)$

Montrer que  $EFGH$  est un quadrilatère puis déterminer sa nature.

**Démontrer une orthogonalité sans les vecteurs**

**Ex 7-8 : Vrai ou faux**

Dans l'espace :

1 ) Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles entre elles.

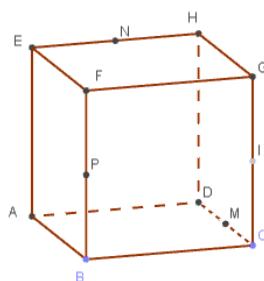
2 ) Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.

3 ) Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.

**Ex 7-9 : Entre deux droites**

Dans le cube ABCDEFGH, dans chacun des cas montrer que les droites sont orthogonales :

1 ) (FG) et (AB)



2 ) (HG) et (FG)

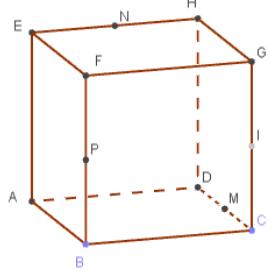
3 ) (EB) et (GD)

4 ) (NF) et (HD)

**Ex 7-10 : Entre une droite et un plan**

Dans le cube ABCDEFGH, dans chacun des cas montrer que la droite et le plan sont orthogonaux :

1 ) (AB) et (BFG)



2 ) (DG) et (BCE)

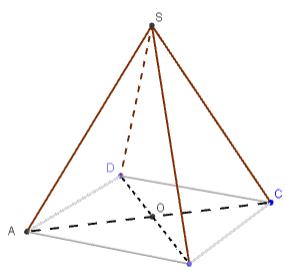
3 ) (AF) et (CEH)

4 ) (MI) et (CHE)

**Ex 7-11 : Dans une pyramide à base carrée**

Soit la pyramide SABCD régulière à base carrée ci-contre . On note I le milieu de [BC].

1 ) Démontrer que les droites (SO) et (BC) sont orthogonales.



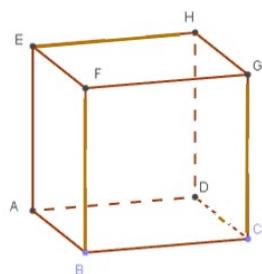
2 ) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (SOI).

3 ) En déduire que les droites (HB) et (DO) sont orthogonales.

**Ex 7-12 : En utilisant la trigonométrie**

Soit un cube ABCDEFGH de côté 4 cm et le point O centre du carré EFGH.

1 ) Déterminer l'intersection des plans (EDG) et (HFB).



4 ) Démontrer que les droites (HD) et (EG) sont orthogonales.

2 ) Calculer  $\tan \widehat{HDO}$  et  $\tan \widehat{DBH}$ .

5 ) En déduire que la droite (EG) est orthogonale au plan (HFB), puis orthogonale à la droite (HB).

6 ) Démontrer que la droite (HB) est orthogonale au plan (DEG).

**Démontrer une orthogonalité avec les vecteurs**

Dans la suite, l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Ex 7-13 : Trouver  $a$  et  $b$** 

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ a \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$  soient orthogonaux.

**Ex 7-15 : Projeté orthogonal sur une droite – distance d'un point à une droite**

Soit les points  $A(0; -1; 3)$  et  $B(-1; 2; 5)$ .

1 ) Montrer que le point  $H(1; -4; 1)$  est le projeté orthogonal du point  $C(5; -2; 0)$  sur la droite  $(AB)$ .

2 ) En déduire la distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$ .

**Ex 7-14 : Droites perpendiculaires – droites orthogonales**

Soit les points  $A(0; 4; 2)$ ,  $B(-1; -3; -2)$ ,  $C(1; 1; 1)$  et  $D(2; 2; -1)$

1 ) Les droites  $(AB)$  et  $(BD)$  sont-elles perpendiculaires ?

2 ) Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont-elles orthogonales ?

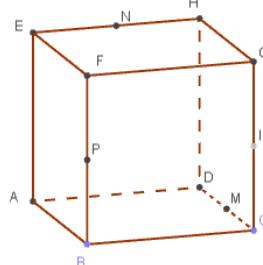
**Ex 7-16 : Plan médiateur**

**Définition :**

Dans l'espace, le **plan médiateur** d'un segment est constitué des points équidistants des extrémités de ce segment. Il s'agit du plan passant par le milieu du segment et orthogonal à ce segment.

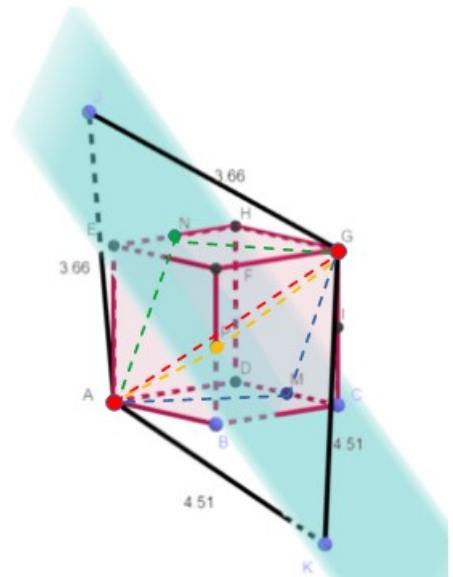
Dans le cube ABCDEFGH :

1 ) Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{BE}$  et  $\overrightarrow{DF}$  sont orthogonaux.



2 ) Démontrer que (DF) est perpendiculaire à (BEG).

4 ) Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et G.



3 ) (BEG) est-il le plan médiateur de [DF] ?

**Ex 7-17 : Distance d'un point à un plan – volume d'un tétraèdre**

**Rappel :** le volume d'un tétraèdre est  $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$

Dans un cube ABCDEFGH de côté 1, on considère les points M, N et P centres respectifs des faces EFGH, BCGF et ABFE.

On considère le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1 ) Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{MP}$  et  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{NP}$ .

2 ) Montrer que (DF) est perpendiculaire à (MNP).

3 ) Soit T le point d'intersection de (DF) et (MNP).  
Montrer que T est le projeté orthogonal de N sur (DF).

2 ) Montrer que (DF) est perpendiculaire à (MNP).

5 ) On note I le milieu de [PN] .  
 a ) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{MI}$

5 ) On note I le milieu de  $[PN]$  .  
 a ) Montrer que les vecteurs  $\vec{MI}$  et  $\vec{PN}$  sont orthogonaux.

4 ) En calculant de deux façons différentes le produit scalaire  $\vec{DF} \cdot \vec{DN}$  , déterminer la distance du point D au plan (MNP)

b ) En déduire l'aire du triangle MNP.

6 ) En déduire le volume du tétraèdre DMNP.

