Continuité : maîtriser le cours

Ex 6-1 : ***Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Si f est continue sur I, alors :

1) On peut tracer une tangente non verticale en tout point de C.

2) f est une fonction qui ne change pas de sens de variation.

3) C se trace sans lever le crayon.

4) L'intervalle I est fermé.

5) La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$

6) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

7) La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle

Ex 6-2 :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I indiqué.

1) $f:x \longmapsto \sqrt{3-x}$ sur $I=]-\infty;3[$

2) $f:x \longmapsto 2|x|+\dfrac{3}{x}$ sur $]0;+\infty[$

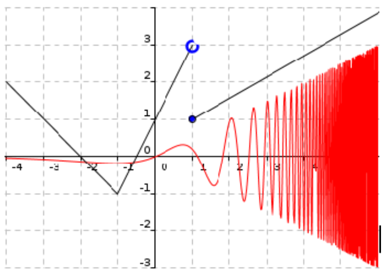
3) $f:x \longmapsto \dfrac{3x^3}{1-3x}$ sur $I=\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

4) $f:x \longmapsto |2x-3|$ sur $I=\mathbb{R}$

Continuité et représentation graphique

Ex 6-3 :

1) Déterminer graphiquement si les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous sont continues sur l'intervalle $[-4;6]$.



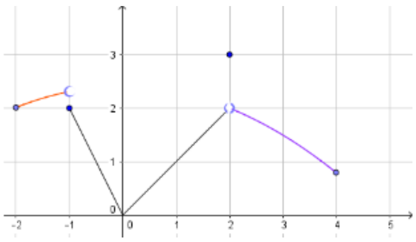
2) Représenter avec un traceur de courbes la fonction $f:x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$.

f est-elle continue sur]0;1] ?

Essayer de tracer f à la main sans lever le crayon . Que peut-on conclure ?

Ex 6-4 :

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.



1) La fonction f est-elle dérivable :

en -1,5 :

en 0 :

en 2 :

2) La fonction f est-elle continue :

sur $[-2;2]$:

sur $[-2;-1]$:

sur $[-2;-1[$:

3) Déterminer $\lim_{x\to 2+} f(x)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)$. la fonction f est-elle continue en 2 ?

Ex 6-5 : ***Avec GeoGebra***

Soit a un entier et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_a(x)=x^2-ax+3 \text{ si } x<2 \\ f_a(x)=-x^2+8x+3 \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$$

1) Conjecturer avec GeoGebra, l'entier a tel que la fonction f_a soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer la conjecture précédente.

Avec la fonction partie entière

On note E la fonction partie entière.

Ex 6-6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\mathrm{E}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1) Tracer la courbe représentative de f avec l'outil de votre choix. Que peut-on conjecturer sur $\mathbb{R}^+$?

2) Démontrer la conjecture précédente.

3) Que peut-on en déduire au sujet de la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$?

Ex 6-7 :

Soit les fonctions f et g définies sur $[-5;5]$ par $f(x)=x|x|$ et $g(x)=(2x+1)|x|$.

1) Tracer les courbes représentatives de f et de g avec l'outil de votre choix.

2) f et g sont-elles continues ?

3) Que peut-on conjecturer graphiquement au sujet de la dérivabilité en 0 de f et de g ?

4) Démontrer les deux conjectures précédentes.

5) La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ?
Peut-on énoncer une règle concernant la dérivabilité du produit d'une fonction dérivable par une fonction non dérivable ?

Image d'une suite convergente par une fonction continue

Ex 6-8 : ***limite de*** $f(u_n)$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel $n\geqslant 2$ par :

$$v_n=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n-1}}$$

1) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $v_n=f(u_n)$

2) Déterminer la limite de (v_n) .

Ex 6-9 : ***limite de*** $f(u_n)$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par :

$$v_n=\sin\left(\frac{\pi n^2-3}{n^2+3}\right)$$

1) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel , $v_n=f(u_n)$

2) Déterminer la limite de (v_n) .

Ex 6-10 : ***$u_{n+1}=f(u_n)$ et un théorème du point fixe***

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n} \end{cases}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$

2) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L, puis déterminer L.

Ex 6-11 : ***$u_{n+1}=f(u_n)$ et un théorème du point fixe***

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L, puis déterminer L.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et corollaire du TVI

Le corollaire du TVI et aussi appelé théorème des bijections

Ex 6-12 : *Maîtriser le cours - Vrai ou faux*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1) Si f change de signe sur I, alors f s'annule sur I.

2) Si $\mathrm{I}=[a;b]$, $f(a)f(b)>0$ et f est continue sur I, alors f s'annule sur I.

3) Si f s'annule une unique fois sur I et f est strictement monotone sur I, alors f est continue sur I.

4) Si f s'annule une unique fois sur I et f est continue sur I, alors f est strictement monotone sur I.

Ex 6-13 : *Au moins une solution*

Montrer que l'équation $(\mathrm{E}):\frac{x^3}{x+1}=8$ admet au moins une solution sur $\mathrm{I}=[0;4]$.

Ex 6-14 : *Une unique solution - utiliser Solve() et nSolve()*

Dans chacun des cas, montrer que l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle I et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} en utilisant un outil de résolutions numériques approchées d'équations (Xcas, Ti-Nspire, NumWorks …) :

Ces outils fournissent une valeur approchée par la méthode de Newton-Raphson ou par la méthode de la sécante. Certains des ces outils retournent une unique solution, d'autres quelques solutions ou même parfois ne retournent rien du tout (plus exactement, retournent 'false'), voire retournent un résultat erroné dans les (rares) cas où la méthode utilisée ne converge pas.
Suivant l'outil utilisé (Xcas : nSolve(), Ti-Nspire : nSolve(), NumWorks : Equations …) , il est possible de préciser l'intervalle sur lequel la solution est cherchée.

Remarque :
Solve() de Xcas ou de la Ti-Nspire CAS est une fonction de calcul formel.
Elle cherche à appliquer divers algorithmes permettant de résoudre certains types d'équations prédéfinis (équations linéaires, du 2nd, du 3ème ou du 4ème degré, équation avec des racines carrées se ramenant aux types précédents, équations avec des 'cos' et 'sin', etc.)
Je ne conseille pas d'utiliser cette fonction car les résultats retournés sont parfois très difficiles à comprendre pour un élève de lycée et ne correspondent pas du tout à l'attendu de l'exercice proposé.

1) $(\mathrm{E}):\sqrt{1-x}=x$ sur I=[0;1]

2) $(\mathrm{E}) : 5 x \mathrm{e}^{-x} = 1$ sur $\mathrm{I} = [1;+\infty[$

Ex 6-15 : ***Signe de f(x)***

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
- Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -4 et 3.
- Les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont -9 et 4
- $f(0)=2$

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Dans les exercices qui suivent, les flèches indiquent la continuité et la stricte monotonie.

Ex 6-16 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;0[$?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]0;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 6-17 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;3[$?
A quel intervalle appartient chacune d'elle ?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]3;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 6-18 : ***f(x)=k : discussion suivant les valeurs de k***

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-1	↗	1

1) Déterminer les extrema de f .

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

3) Déterminer le signe de f .

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Ex 6-19 : ***Tableau de variation de f à partir du tableau de variation de f'***

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée f' (f' étant continue) admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
			3		
f'		↗		↘	
	$-\infty$				$-\infty$

Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f .

Ex 6-20 : ***Existence d'au moins une solution***

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathrm{I}=[0;1]$, telle que pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f(x)\in\mathrm{I}$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha\in\mathrm{I}$, tel que $f(\alpha)=\alpha$.

Ex 6-21 : ***Discuter suivant les valeurs de n***

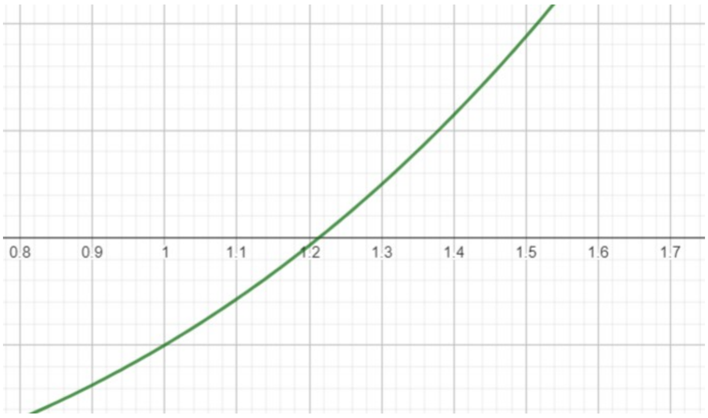
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}$.

Discuter suivant les valeurs de n et de a , le nombre de solutions de l'équation $x^n=a$.

Algorithme – Python

Ex 6-22 : Méthode de Newton-Raphson

1) **Introduction :**
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On montre facilement grâce au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont nous allons déterminer une valeur approchée par la méthode de la sécante.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\dfrac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .

Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 .

T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 .

Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**
Revenons sur le cas général.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et telle que la dérivée ne s'annule pas.
On note C_f sa courbe représentative et x_0 un réel.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir la suite (x_n) des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$.
Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n=10$.

```
from math import *
N=int(input("N="))
x_0=float(input("x_0="))
def f(x):
    return (……………….)
def f_prime(x):
    return (……………….)
def MethodeNewton(x_0, N):
    x=……………….
    for i in range(……………….):
        x.append(……………...……………….)
    return x
print(MethodeNewton(x_0,N))
```

Tester ce programme pour différente valeur de x_0 . Que constatez-vous ?

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.
Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
from math import *
x_0=float(input("x_0="))
p=float(input("p="))
def f(x):
    return (……………...)
def f_prime(x):
    return (……………...)
def MethodeNewton(x_0,p):
    x=……………...
    i=……………...
    x.append(x[0] - f(x[0])/f_prime(x[0]))
    while (……………...……………...>p):
     i=……………...
     x.append(……………...……………...)
    return x
print(MethodeNewton(x_0,p))
```

3) **Application :**
Déterminer les fonctions à utiliser pour déterminer avec ce programme des valeurs approchées à 10^{-10} près de π , e , $\sqrt{2}$ et du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de $x^2=x+1$), puis déterminer ces valeurs approchées.

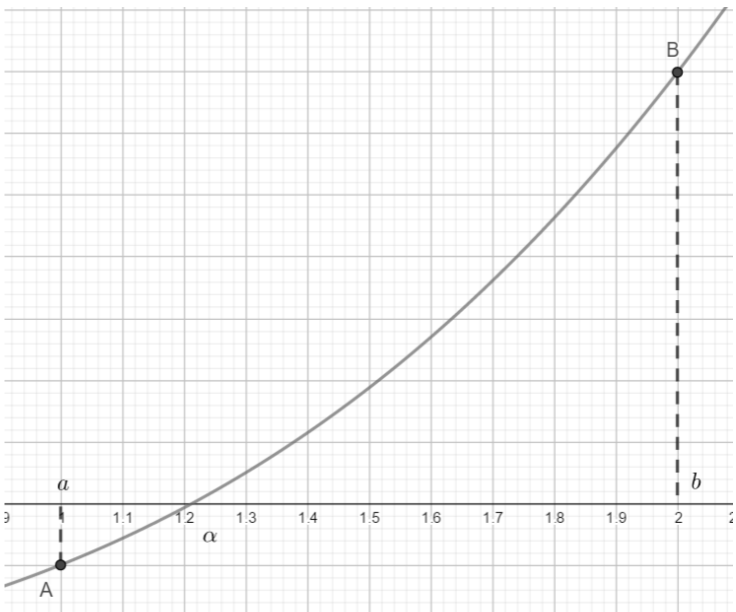
Attention :
Dans le cas où l'équation $f(x)=0$ admet plusieurs solutions, il faut choisir une valeur de x_0 proche de la solution attendue, afin que l'algorithme converge bien vers cette solution.
Il faut aussi tout faire pour que la dérivée ne s'annule pas …

Visualiser la méthode de Newton avec GeoGebra :
https://pierrelux.net/documents/cours/1_2019/pdf/6_application_derivation/newton.html

Ex 6-23 : Méthode de la sécante

1) **Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On montre facilement grâce au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont nous allons déterminer une valeur approchée par la méthode de la sécante.

On considère les points $A(1;f(1))$ et $B(2;f(2))$

Étape 1 :

Tracer le segment [AB] : il coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1 , puis placer le point $A_1(x_1;f(x_1))$.

Étape 2 :

Tracer le segment $[A_1B]$: il coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2 , , puis placer le point $A_2(x_2;f(x_2))$.

Et ainsi de suite …

En notant x_n l'abscisse du point A_n , on définit ainsi une suite (x_n) de réels de $[a;b]$ et on admet (grâce à la convexité) que pour tout entier naturel n , $f(x_n)\leqslant 0$.

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général.
Soit f une fonction strictement croissante, continue et convexe sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f(a)<0$ et $f(b)>0$.

On considère les points $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$

On note C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer une équation de la droite $(A_n B)$

b) En déduire que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$

c) Démontrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.

d) En déduire que (x_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

3) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$.
Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n = 20$.

```
N=int(input("N="))
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
def f(x):
    return (………...)
def Methodesecante(a,b, N):
    x=………...
    for i in range(………...):
        x.append(………...………...……….. )
    return x
print(Methodesecante(………...))
```

Tester ce programme et comparer avec la méthode de Newton. (ex 22) d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
from math import *
p=float(input("p="))
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
def f(x):
    return (……….....………...)
def Methodesecante(a,b,p):
    x=………...
    i=………...
    x.append(……….....……….....……….....……...)
    while (……….....………...):
      i=i+1
      x.append(……….....……….....……….)
    return x
print(Methodesecante(……….....………...))
```

Visualiser la méthode de la sécante avec GeoGebra :
https://pierrelux.net/documents/cours/tspe2020/6_continuite/secante.html

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 6-24 : ***Baccalauréat - Nouvelle Calédonie 2 mars 2019 – ex 2 (en partie)***

Fontion exp – corollaire du TVI – signe en fonction de α – fonction auxiliaire – maximum en fonction de α

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.