Nombre dérivé d'une fonction en un réel a : quelques rappels

Ex 5-1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

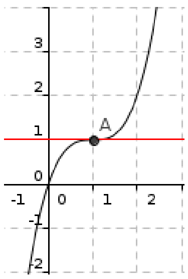
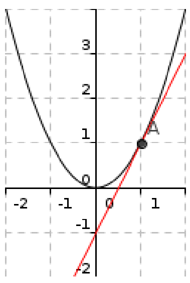
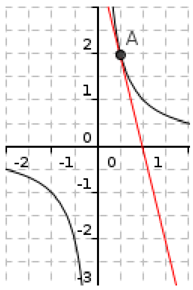
2) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a .

3) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un réel a .

4) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ex 5-2 : ***Déterminer*** $f'(a)$ ***à l'aide d'un graphique.***

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 5-3 :

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f : x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f : x \longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$

4) $f: x \longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f: x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

Formules de dérivation : quelques rappels

Ex 5-4 :

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel.

	Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Dérivable sur :**
1)	$f: x \longmapsto k \quad (k \in \mathbb{R})$		
2)	$f: x \longmapsto x$		
3)	$f: x \longmapsto \sqrt{x}$		
4)	$f: x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$		
5)	ku		
6)	$u+v$		
7)	uv		
Si pour tout réel a de D , $v(a) \neq 0$			
8)	$\frac{1}{v}$		
9)	$\frac{u}{v}$		

Compléter :
Toute fonction polynôme est dérivable sur …

Toute fonction rationnelle est dérivable sur …

La notation $f \circ g$ ou $v \circ u$

Pour les exercices concernant les composées de fonctions, il faut toujours en premier lieu déterminer **l'ensemble de définition** de $f \circ g$ avant de donner une expression de $f \circ g(x)$

Ex 5-5 : ***Déterminer*** $f \circ g$ ***et*** $g \circ f$

On considère les fonctions : $f: x \longmapsto \frac{1}{x-3}$ et $g: x \longmapsto x+4$

1) Déterminer $f \circ g$.

2) Déterminer $g \circ f$.

3) $f : x \longmapsto 4x-3$

<u>Ex 5-6 :</u> *La notation* f^2

Dans chacun des cas ci-dessous définir f^2

<u>Attention</u> : Ne pas confondre cette notation avec la puissance d'une fonction pour la multiplication des fonctions.
Par exemple, $\sin^2$ désigne couramment le carré de la fonction sinus.
Généralement, le contexte de l'exercice, nous évite de faire cette confusion malheureuse.

1) $f : x \longmapsto x$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

<u>Ex 5-7 :</u> *Trouver u et v*

Dans chacun des cas, déterminer l'expression des fonctions v et u telles que $f = v \circ u$.
Dans cet exercice, on ne tient pas compte des ensembles de définition.

1) $f : x \longmapsto \sqrt{3x^2-5}$

2) $f : x \longmapsto \sqrt{\cos x+1}$

3) $f : x \longmapsto e^{x^2-5}$

4) $f : x \longmapsto \sin(3x^3-2)$

5) $f : x \longmapsto (4x^2+5x+1)^3$

6) $f : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^6$

Ex 5-8 : ***Dérivées de fonctions composées***

Sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité, déterminer dans chacun des cas de l'exercice 7 les dérivées des fonctions u , v puis f .

1) $f : x \longmapsto \sqrt{3x^2-5}$

2) $f : x \longmapsto \sqrt{\cos x+1}$

3) $f : x \longmapsto e^{x^2-5}$

4) $f : x \longmapsto \sin(3x^3-2)$

5) $f : x \longmapsto (4x^2+5x+1)^3$

6) $f : x \longmapsto \left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^6$

Dérivées successives

Ex 5-9 : ***Dérivées successives***

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée . Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f : x \longmapsto x^4-3x^3+2$ sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

c) $h(x)=\sqrt{x}$ sur $[1;3]$

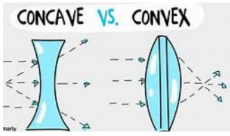
d) $i : x \longmapsto (-2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation . On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$ …
Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

Convexité, concavité, points d'inflexion

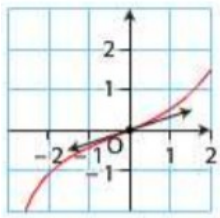
Ex 5-10 : ***À partir d'une courbe***

Pour chaque courbe, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
Préciser les éventuels points d'inflexion .

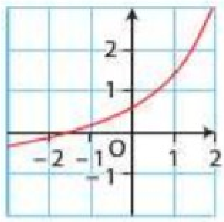


On considère que le comportement de la courbe se poursuit de manière identique en dehors de la fenêtre.

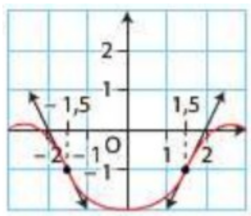
1)



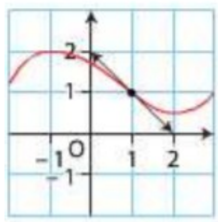
2)



3)



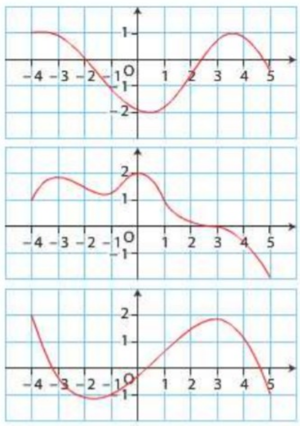
4)



Ex 5-11 : ***À partir d'une courbe***

Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4\,;-2]$ et sur $[4\,;5]$
- $f\,'$ s'annule au moins trois fois
- la représentation graphique de f admet quatre points d'inflexion.



Ex 5-12 : ***À partir d'un tableau de variation de f'***

Voici le tableau de variation de la fonction $f\,'$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f\,'(x)$	$+\infty$	↘		↗	2	↘	
			0				1

1) Déterminer le sens de variation de f

2) Déterminer la convexité de f

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 5-13 : ***À partir du tableau de signe de de f''***

Voici le tableau de signe de la fonction $f\,''$ d'une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f\,''(x)$		+	0	-	0	+	

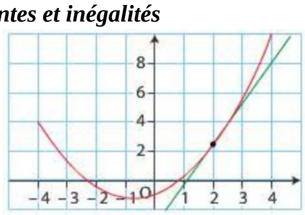
1) Déterminer le sens de variation de $f\,'$

2) Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses des éventuels points d'inflexion.

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 5-14 : ***Position par rapport aux tangentes et inégalités***

Dans le repère ci-contre, on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.



1) Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle $[-4\,;4]$.

2) Pourquoi peut-on étendre ce résultat à $\mathbb{R}$?

3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1 \geqslant \frac{11}{4}x-3$

4) Montrer alors que $x^2 \geqslant 4x-4$

<u>Ex 5-15 :</u> ***Position par rapport aux tangentes et inégalités***

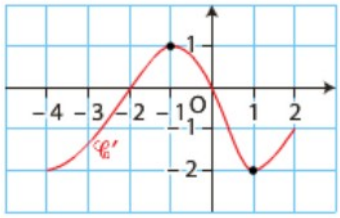
f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère.
1) Rappeler la convexité de f .

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3) En déduire que, pour tout x de $[0;+\infty[$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

<u>Ex 5-16 :</u> ***Convexité à partir de la courbe représentative de f'***

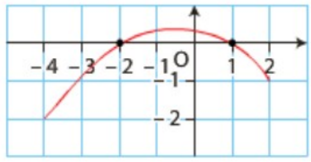
Dans un repère, on a tracé la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f' dérivable sur un intervalle [−4 ; 2].
Déterminer, par lecture graphique, la convexité de f .



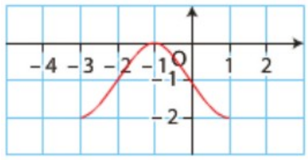
<u>Ex 5-17 :</u>

Dans chacun des cas, déterminer la convexité de la fonction et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1) f est une fonction deux fois dérivable sur [−4 ; 2] dont la dérivée f'' est représentée ci-contre.



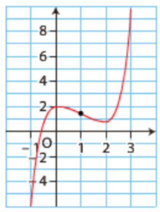
2) g est une fonction deux fois dérivable sur [−3 ; 1] dont la dérivée g'' est représentée ci-contre.

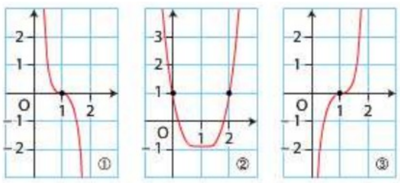


<u>Ex 5-18 :</u> ***Lien entre les représentations graphiques de f et f''***

Dans un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur [−1 ; 3].

Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente celle de la fonction dérivée seconde f'' de f ?





Étude du signe de f'' pour déterminer la concavité

Ex 5-19 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-20 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+2x^3+12x^2-8x-6$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-21 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+1$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-22 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}+7$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-23 : ***Position par rapport aux tangentes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$.

On note C_f sa courbe dans un repère.

Étudier la position des tangentes à C_f en 4 et en -4 par rapport à la courbe C_f .

Ex 5-24 : ***Famille de fonctions***

Pour tout entier n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+nx$

On note C_n la courbe représentative de f_n.

Montrer que C_n admet un point d'inflexion pour tout entier n.

Ex 5-25 : ***S'entraîner à la logique***

1) Justifier que les propositions ci-dessous sont fausses à l'aide d'un contre-exemple, éventuellement graphique.

a) Si une fonction n'est pas convexe sur un intervalle I, alors elle est concave sur cet intervalle.

b) Si une fonction f est dérivable et convexe sur un intervalle I, alors sa dérivée f' est positive sur I.

c) Si f est une fonction convexe sur un intervvalle $[a;b]$, telle que $f(a)=f(b)=0$, alors f est positive sur $[a;b]$.

2) Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.
Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'implication énoncée est vraie ou fausse, puis rédiger sa réciproque et dire si celle-ci est vraie ou fausse.

a) Si la courbe C admet un point d'inflexion, alors la fonction f est convexe, puis concave.

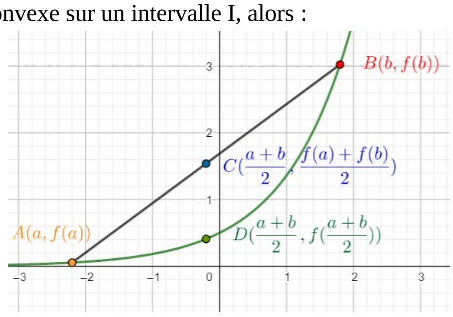
b) Si $f'(x)$ s'annule sur I, alors C admet un point d'inflexion.

<u>Ex 5-26 :</u> *Position par rapport aux sécantes et moyenne*

1) En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, compléter les propriétés suivantes que nous allons seulement conjecturer.

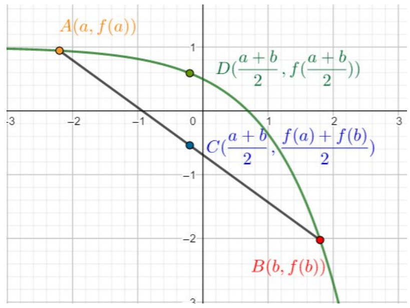
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant$



- Si f est une fonction concave sur un intervalle I, alors :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant$



2) Soit a et b deux réels strictement positifs, tels que $a<b$.
Dans chaque cas, démontrer l'inégalité en étudiant la convexité d'une fonction bien choisie.

a) $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

c) $\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$

d) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

EN ROUTE VERS LE BAC

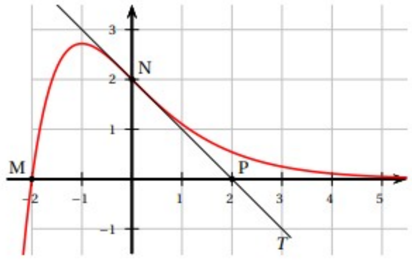
Ex 5-27 : ***Métropole - sujet 2 (dévoilé) 20 juin 2024***

Fonction exp – lecture graphique – primitives – convexité

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2; 0) appartenant à la tangente T.

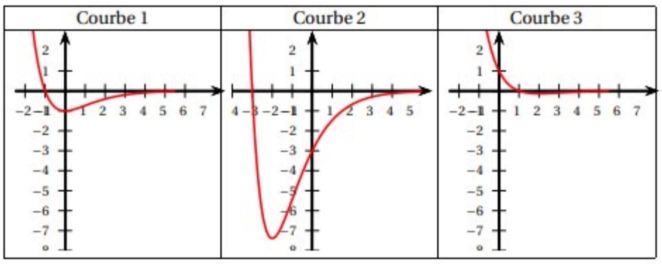
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.
   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.



Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.