Limites de fonctions

Ex 4-1 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors :

a) Il existe un réel x tel $f(x) > 10^9$

b) Pour tout réel A , il existe un réel m , tel que si $x > m$, alors $f(x) > \text{A}$

c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x > m$, alors $f(x) > \text{A}$

d) $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $x > m \Rightarrow f(x) > 10^4$

2) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -0{,}001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ sur lequel f est strictement négative.

4) Si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ex 4-2 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Ex 4-3 : ***Conjecturer une limite – piéger la calculatrice***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $f : x \longmapsto 10^{-3} x^2 - 10^2 x$

2) $g : x \longmapsto \dfrac{3x^2 - 2}{10^3 x - 4}$

3) $h : x \longmapsto 10x^3 - 0{,}01 x^4$

Ex 4-4 : ***Limite et position relative par rapport à une droite***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y = 1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Limite en *a* (avec *a* réel)

Ex 4-5 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

c) $\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

Ex 4-6 : ***Vrai ou faux***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Si $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors $d: y = -1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors $d: y = -1$ est asymptote verticale à C.

3) Si $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors $d: x = -1$ est asymptote verticale à C.

Ex 4-7 : ***Conjecturer une limite***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1, si elle existe, de $f: x \longmapsto \dfrac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9, si elle existe, de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$

Ex 4-8 : ***Asymptotes***

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$

Opérations sur les limites

Ex 4-9 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

3) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ex 4-10 : *Calculs de limites*

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x}+x+\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x \to 0+} \left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+3x\right)$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+3x\right)$

4) $\lim_{x \to 2-} \frac{x^3}{6-3x}$

5) $\lim_{x \to +\infty} \left(2x+1+\frac{1}{x^2}\right)$

6) $\lim_{x \to -\infty} (4-x^2)(2x-4)$

7) $\lim_{x \to 4+} \left(3x-1+\frac{1}{x-4}\right)$

8) $\lim_{x \to 0} \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$

9) $\lim_{x \to 2+} \left(4-x^2+\frac{4}{4-x^2}\right)$

10) $\lim_{x \to -\infty} \left(3-\frac{2}{1-2x}\right)$

Ex 4-11 : ***Formes indéterminées***

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ telles que :

a) $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x))=0$

b) $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x))=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x))=3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ telles que :

a) $\lim_{x\to-\infty} (f(x)g(x))=0$

b) $\lim_{x\to-\infty} (f(x)g(x))=3$

c) $\lim_{x\to-\infty} (f(x)g(x))=-\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ telles que :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}=0$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}=3$

c) $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 4-12 : ***Logique***

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim_{x\to+\infty} (f(x)g(x))=0$, il faut que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

2) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)g(x)) = 0$, il suffit que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Ex 4-13 : *Fonctions polynômes*

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

Cette propriété, très pratique, n'est plus au programme. C'est tout de même un outil qui permet de conclure très rapidement pour orienter votre démarche ou pour rejeter un résultat erroné. Je l'utilise directement dans la question 2), mais le jour du bac il sera nécessaire de refaire la factorisation.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme
$\mathrm{P}(x) = -8x^3 + 14x^2 + 8x + 4$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

$\mathrm{Q}(x) = \dfrac{x^5}{4} - \dfrac{x^3}{2}$ et $\mathrm{R}(x) = 1 - 4x + 5x^2$

Ex 4-14 : *Fonctions rationnelles*

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

Cette propriété, très pratique, n'est plus au programme. C'est tout de même un outil qui permet de conclure très rapidement pour orienter votre démarche ou pour rejeter un résultat erroné. Je l'utilise directement dans la question 2), mais le jour du bac il sera nécessaire de refaire la factorisation.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle
$f(x) = \dfrac{3x+2}{4x^2-5}$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :
$g(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 5}{2x^3 - 5}$ et $h(x) = \dfrac{(x-5)^4}{(3x^2-5)^2}$

Ex 4-15 : ***Changement de forme - Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur ℝ -{4} par $f(x)=\frac{6x-25}{2x-8}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\neq 4$, $f(x)=a+\frac{b}{2x-8}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ex 4-16 : ***Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur ℝ -{-2;2} par $f(x)=\frac{3x-7}{x^2-4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>Ex 4-17 :</u> ***Déterminer a, b et c ...***

Soit $f : x \longmapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	-1	-4	$-\infty$ ‖ $+\infty$	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .

2) À partir de l'expression $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f .

<u>Ex 4-18 :</u> ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x}}{x+2}$

Limite d'une fonction composée

Ex 4-19 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

2) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

3) $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

4) $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}$

5) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3+2x^2-7}$

6) $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}+2}$

Ex 4-20 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+3}\right)$ (factoriser par x)

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+3}\right)$ (factoriser par x)

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ (penser à l'expression conjuguée)

Théorèmes de comparaison

Ex 4-21 : ***Vrai ou faux***

1) Si pour tout réel $x \leqslant 0$, $f(x) \geqslant x^2$, alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) Si pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) Si pour tout réel $x\geqslant 1$, $1\leqslant f(x)\leqslant x$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

Ex 4-22 : ***Limite par encadrement***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x\neq 0$,
$3-\frac{1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant 3+\frac{1}{x^2}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 4-23 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x\neq 0$, $\frac{f(x)}{x^2}\geqslant\frac{1}{5}$ et $\frac{g(x)}{x}\geqslant\frac{1}{5}$.
Quelle(s) limite(s) peut-on déduire pour les fonctions f et g ?

Ex 4-24 : ***Deux méthodes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

1) Déterminer une fonction g telle que pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Retrouver cette limite en utilisant la limite d'une fonction composée.

Ex 4-25 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

1) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Peut-on grâce aux hypothèses dire si f admet une limite en 0 et si oui laquelle ?

2) Déterminer la limite de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 4-26 :

Soit f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geqslant 5$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leqslant x-5 \leqslant x$)

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Avec la fonction exponentielle

Ex 4-27 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^2$

2) $\lim_{x \to +\infty} 3e^{x} - 4x^{4} + x - 5$

3) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - x^{4}}{2x^{3} - 5e^{x}}$

4) $\lim_{x \to -\infty} e^{x} - 2x$

5) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} - x^{4}}{2 - 5e^{x}}$

6) $\lim_{x \to +\infty} e^{x^{2} - 2x + 1}$

7) $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x^{2}}$

8) $\lim_{x \to +\infty} (x+1) e^{-\frac{1}{2}x}$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 4-28 : *Métropole - sujet 1 secours 19 juin 2024 – ex 4 (extrait)*

Tableaux de variations – limites – asymptotes

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

   a. Affirmation 1 :
   La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

   b. Affirmation 2 :
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = +\infty$.

Ex 4-29 : *Baccalauréat S Asie juin 2010 – Ex 4-4 (extrait)*

Calculs de limites avec la fonction exp - asymptote

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites
   a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

Ex 4-30 : ***Baccalauréat S Polynésie sept 2010 – Ex 4-4 (extrait)***

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.

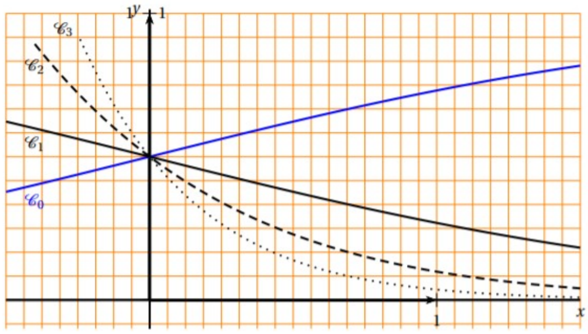
Ex 4-31 : ***Baccalauréat S centres étrangers juin 2009 – Ex 4-4 (extrait)***

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   a. Étudier le sens de variation de f_0.
   b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$
   b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.