Positions relatives

Ex 3-1 : ***Vrai ou faux***

Dans l'espace :
1) Trois droites concourantes (qui se coupent en un même point) sont coplanaires.

2) Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.

3) Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

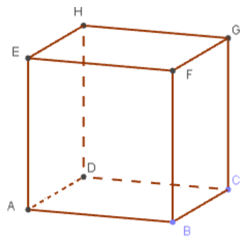
4) Une droite et un plan parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.

5) Une droite et un plan parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

Pour les exercices 2, 3 et 4, on considère le cube ci-dessous :

Ex 3-2 : ***Entre deux droites***

Dans chacun des cas, donner la position des droites :



1) (AB) et (CG)

2) (AF) et (GH)

3) (AC) et (FH)

4) (CE) et (DF)

5) (BH) et (AE)

Ex 3-3 : ***Entre une droite et un plan***

Dans chacun des cas, donner la position de la droite et du plan :
1) (AB) et (CDH)

2) (AC) et (BDF)

3) (BG) et (CDE)

4) (AG) et (CFH)

5) (BC) et (FAD)

6) (AB) et (ACD)

Ex 3-4 : ***Entre deux plans***

Dans chacun des cas, donner la position des plans :

1) (ABC) et (EGH)

2) (ABG) et (CDE)

3) (CAF) et (DGH)

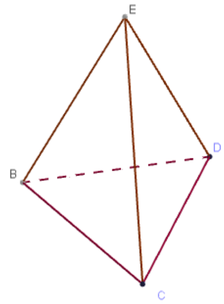
4) (FHC) et (BDE)

5) (FAH) et (BCG)

<u>Ex 3-5 :</u> ***Dans un tétraèdre***

Dans chacun des cas, étudier les positions des droites et plans.

1) (EB) et (CD)



2) (EC) et (BCD)

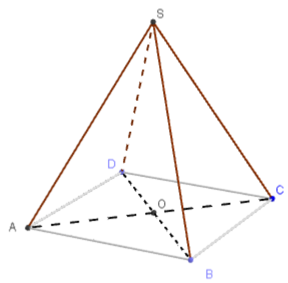
3) (EBC) et (ECD)

4) (EC) et (BD)

<u>Ex 3-6 :</u> ***Dans une pyramide – intersections***

Soit SABCD une pyramide à base carrée.
O est le centre du carré ABCD.

1) Déterminer l'intersection de (SAB) et (SBC).



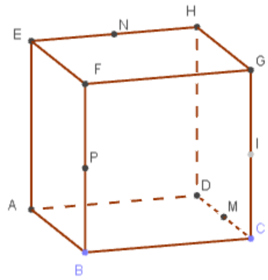
2) Déterminer l'intersection de (SAC) et (SBD).

3) Étudier la position de (SB) et (AC).

4) Déterminer l'intersection de (SAB) et (SCD).
On pourra utiliser le **<u>théorème du toit</u>** . (cf **ex** 3-13)

<u>Ex 3-7 :</u>

Dans le cube ci-contre, M, N et P sont les milieux respectifs de [CD], [EH] et [BF].
Dans chacun des cas, étudier les positions relatives de :



1) (MN) et (GH)

2) (MP) et (DF)

3) (NP) et (CDG)

4) (EM) et (BFG)

5) (AMN) et (BCG)

6) (MPG) et (ADE)

<u>Ex 3-8 :</u> ***Droites coplanaires***

Dans le cube de l'Ex 3-7 on note I le milieu de [CG].
Dire si les droites sont coplanaires ou non ?
1) (BC) et (EH)

2) (AG) et (BH)

3) (AG) et (EI)

4) (BH) et (EI)

<u>Ex 3-9 :</u> ***Utilisation des symboles mathématiques***

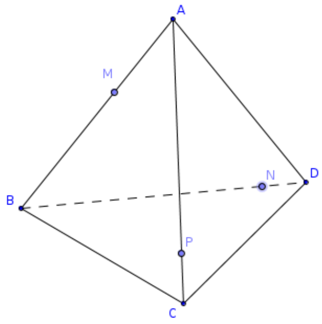
On considère le cube de l'Ex 3-7 .
Compléter, en utilisant les symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ et $\not\subset$.

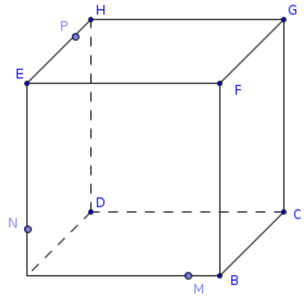
1) N … (EH)	2) A … (EPM)	3) (BM) … (ABC)	4) (PD) … (EFD)
5) B … (EGP)	6) M … (NDC)	7) (MN) … (EHD)	8) F… (ENG)

<u>Ex 3-10 :</u> ***Sections de solides***

Dans chacun des cas, déterminer la section du solide par le plan (MNP).

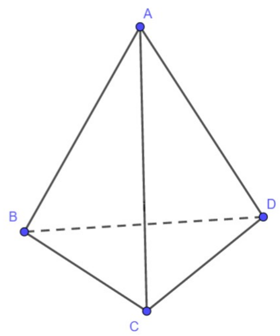
C'est à dire (quand elles existent) les intersections avec chacune des faces du solide donné.





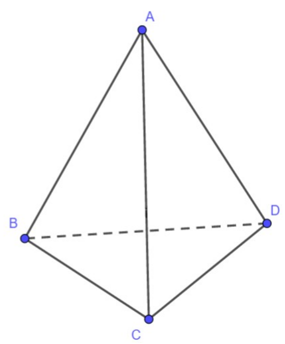
<u>Ex 3-11 :</u> ***Intersections et points alignés***

Soit un tétraèdre ABCD, de sommet A. Les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [AB] et [AC] de telle sorte que (IJ) et (BC) ne soient pas parallèles.
1) Déterminer l'intersection de (IJ) et de (BCD).



2) En déduire l'intersection des plans (DIJ) et (BCD).

3) Que devient cette intersection si (IJ)//(BC) ?



4) Soit maintenant un point K sur [AD] , de telle sorte que (IK) et (BD) ne soient pas parallèles.
On note M, N et P les intersections respectives de (IJ) et (BC), de (IK) et (BD) et de (JK) et (CD).
Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

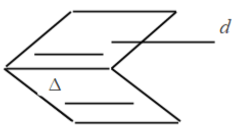
<u>Ex 3-12 :</u> ***Droites parallèles***

Dans un cube ABCDEFGH, le point M appartient à l'arête [AB] et le point N est l'intersection de la droite (AD) avec le plan (FHM).
Démontrer que (FH)//(MN).

<u>Théorème du toit</u>

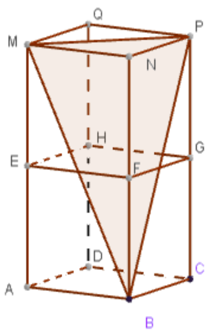
Ce théorème n'est plus à connaître. Il sera rappelé si nécessaire

Si P et P' sont deux plans sécants et parallèles à une droite d , alors l'intersection de P et P' est parallèle à d .



<u>Ex 3-13 :</u>

Soit le parallélépipède suivant constitué de deux cubes superposés.



1) Déterminer l'intersection du plan (MPB) avec la droite (NG).

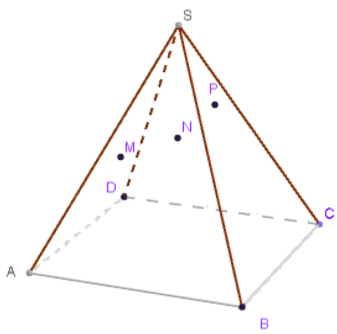
2) Déterminer l'intersection du plan (MPB) avec la droite (EN).

3) En déduire l'intersection du plan (MPB) avec le plan (ENG)

4) Démontrer que l'intersection obtenue à la question 3 est parallèle à la droite (EG).

<u>Ex 3-14 :</u>

Soit la pyramide SABCD dont la base est un parallélogramme.
M et N appartiennent au plan (SAB) et P appartient au plan (SBC).



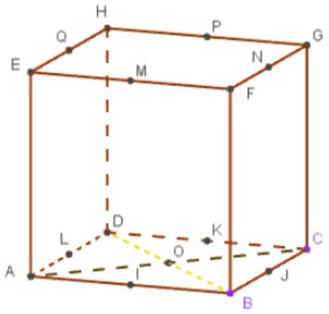
1) Déterminer l'intersection des plans (SAB) et (SCD) et l'intersection des plans (MNP) et (SAB).

2) En déduire l'intersection des plans (MNP) et (SCD).

3) Construire la section de la pyramide par le plan (MNP).

Vecteurs de l'espace

Dans les exercices 15 à 17, on considère la figure suivante.
Sur chaque arête, on a indiqué le milieu de celle-ci.



Ex 3-15 : ***vecteur égaux - translations***

1) Dans chaque cas, donner deux vecteurs égaux au vecteur donné :

a) $\overrightarrow{BF}$

b) $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{BM}$

d) $\overrightarrow{IL}$

e) $\overrightarrow{OL}$

2) Dans chaque cas, déterminer :

a) l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

b) l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{LP}$.

c) l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{PN}$.

Ex 3-16 : ***Trouver le point manquant – combinaisons linéaires***

Compléter les égalités suivantes en utilisant les points de la figure :

1) $\overrightarrow{A...}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) $\overrightarrow{I...}=-\overrightarrow{IA}$

3) $\overrightarrow{B...}=2\overrightarrow{EQ}$

4) $\overrightarrow{H...}=-2\overrightarrow{BI}$

5) $\overrightarrow{B...}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$

6) $\overrightarrow{...H}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$

7) $\overrightarrow{B...}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DH}$

8) $\overrightarrow{B...}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{DH}$

9) $\overrightarrow{B...}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$

10) $\overrightarrow{A...}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}$

11) $\overrightarrow{B...}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$

12) $\overrightarrow{L...}=\overrightarrow{HG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CP}$

Ex 3-17 : ***Décomposer un vecteur dans une base***

Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{MC}$ dans la base $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC})$

Ex 3-18 : ***Relation de Chasles***

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.
Montrer que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

Ex 3-19 : ***Représenter des combinaisons linéaires***

Sur la figure ci-dessous, représenter les points :

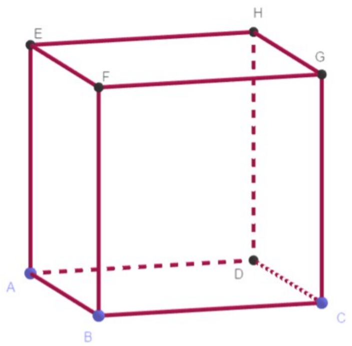
a) I défini par $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

b) J défini par $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

c) K image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{EB}$

d) L défini par $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

e) M image de C par la translation de vecteur $\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$



Points alignés, parallélisme

Ex 3-20 : ***Alignement***

Soit A, B et C trois points non alignés et les points D et E définis par :

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$

En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, montrer que C, D et E sont alignés.

Ex 3-21 : ***Parallélisme de droites et vecteurs directeurs***

Dans le triangle ABC, I est le milieu du segment [AC] et les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BC}$.

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{DE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) En déduire que $\overrightarrow{BI}$ est un vecteur directeur de (DE).
Que peut-on en déduire pour les droites (BI) et (DE) ?

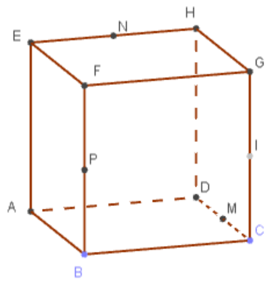
Ex 3-22 : ***Points alignés***

Dans l'espace, on considère les points A, B , C , D et E tels que
$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Déterminer la valeur du réel x pour que les points A, D et E soient alignés.

Vecteurs coplanaires – bases des vecteurs de l’espace

Ex 3-23 :



On considère la figure suivante.
1) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils coplanaires ?

2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires.

3) Démontrer que $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FH}$ forment une base.

4) Montrer que les points M,P et un point quelconque Q sont coplanaires.

5) Montrer que $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

6) Montrer que $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

7) Déterminer la décomposition des vecteurs ci-dessous dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

a) $\overrightarrow{DG}$

b) $\overrightarrow{BH}$

c) $\overrightarrow{AG}$

<u>Ex 3-24 :</u> ***Bases des vecteurs de l'espace***

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base des vecteurs de l'espace et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis par :
$\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{w}=3\vec{i}-\vec{j}$.

1) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) Peut-on trouver des réels a et b tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$?

3) Peut-on dire que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs ?

<u>Ex 3-25 :</u> ***Points coplanaires ?***

Soit un tétraèdre ABCD, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
On construit les points E et F tels que $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$.

1) Déterminer la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF.

2) Démontrer que $2\overrightarrow{DJ}-\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{JI}$.

3) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$?

4) Que peut-on en déduire pour les points D, I, J et F ?

Ex 3-26 : ***Parallélisme de plans et vecteurs directeurs***

Soit un tétraèdre ABCD et les points E et F définis par :

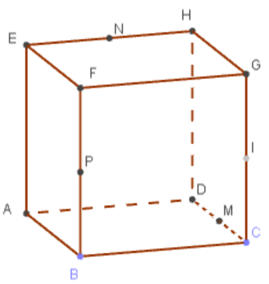
$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

1) En exprimant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$, démontrer que A, E et F ne sont pas alignés.

2) Démontrer que les plans (BCD) et (AEF) sont parallèles.

Repères de l'espace

Dans les exercices 27 à 29, on considère la figure suivante.



Ex 3-27 : ***Calculs de coordonnées***

Dans le cube ci-contre, M, N, P et I sont les milieux respectifs de [CD], [EH], [BF] et [CG].

On considère le repère $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées :

1) Des points E, P, I et B.

2) Des vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{IB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{BH}$.

3) Du centre de la face EHDA.

4) Du centre Ω du cube.

5) Du vecteur $\vec{t}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et du vecteur $\vec{p}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

Ex 3-28 : ***Milieux et points alignés***

Déterminer les coordonnées des points S et T milieux respectifs des segments [NP] et [HB].

Les point S, T et C sont-ils alignés ?

Ex 3-29 : ***Recherche des coordonnées d'un point***

Déterminer les coordonnées du point Q défini par $\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{BG}$

Dans les exercices qui suivent, on considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace

Ex 3-30 : ***Droite et plan parallèles ?***

Soit les points $A(-2;2;-1)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;0;0)$, $D(0;-4;1)$ et $E(-2;-1;-2)$

1) Montrer que A, B et C définissent un plan.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ et celles du vecteur $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

3) Que peut-on en déduire pour ces deux vecteurs et pour la droite (DE) ?

Ex 3-31 : ***Droite et plan parallèles ?***

Soit les points $A(2;3;-1)$, $B(1;3;4)$, $C(0;1;-3)$, $D(2;0;0)$ et $E(-2;-2;8)$.

1) Montrer que A, B et C définissent un plan.

2) Peut-on trouver deux réels x et y tels que $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

3) Que peut-on en déduire pour la droite (DE) ?

Ex 3-32 : ***Points coplanaires ?***

Soit les points $A(0;1;-1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$ et $D(7;3;-1)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

3) Que peut-on en déduire pour les points A, B , C et D ?

Ex 3-33 : ***Base des vecteurs de l'espace ?***

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\-18\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1) Peut-on trouver deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$?

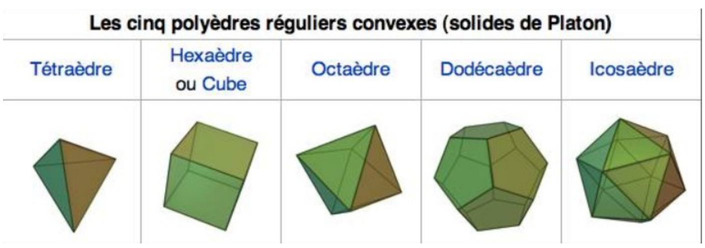
2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont linéairement indépendants . Forment-ils une base des vecteurs de l'espace ?

Ex 3-34 : ***Points coplanaires ?***

Dans chacun des cas, étudier si les points sont coplanaires ou non .

1) $A(4;5;2)$, $B(-3;-1;7)$, $C(9;5;-3)$ et $D(1;2;0)$.

2) $A(1;2;3)$, $B(1;3;2)$, $C(2;1;3)$ et $D(2;3;1)$



Ex 3-35 : ***Droites parallèles ou sécantes ?***

Soit les points $A(2;1;5)$, $B(4;2;4)$, $C(3;3;5)$ et $D(0;3;7)$.

1) Montrer que (AD) et (BC) sont parallèles.

2) Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.