DÉNOMBREMENT

1) PRINCIPE ADDITIF

Définition :

Soit A un ensemble fini . Le nombre d'éléments de A s'appelle **le cardinal de A** et est noté Card(A).

Propriété : *admise*

Si A_1 , A_2 ,...., A_n sont n ensembles deux à deux disjoints, alors :

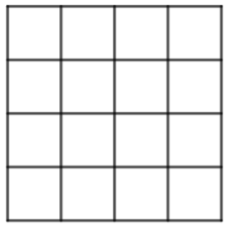
Card($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$)=card(A_1)+Card(A_2)+......+Card(A_n).

Rappel :

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Remarque : Si des ensembles forment une partition d'un autre ensemble, ils sont alors deux à deux disjoints.
Ainsi, si A est une partie d'un ensemble E, alors card($\overline{A}$)=card(E)-card(A)

Exemple : Combien y a-t-il de carrés sur la figure ci-contre?



On note E l'ensemble de tous ces carrés et A_1 , A_2 , A_3 , A_4 respectivement l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés 1, 2, 3 et 4 carreaux.
Les sous-ensembles A_1 , A_2 , A_3 , A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont pas d'éléments en commun et que leur réunion est égale à E).
D'après le principe additif, on a :

Card(E)=Card(A_1)+Card(A_2)+Card(A_3)+Card(A_4)=16+9+4+1=30.

Remarque : Si A et B sont quelconques (c'est-à-dire pas nécessairement disjoints), alors :
Card(A $\cup$ B) = Card(A) + Card(B) - Card (A $\cap$ B).

2) PRODUIT CARTÉSIEN

Définition :

Soit A et B deux ensembles finis et non vides.
Le produit cartésien de A par B noté A $\times$ B est l'ensemble des couples $(x;y)$ formés d'un élément x de A **suivi** d'un élément y de B.
On définit de la même façon le produit cartésien de 3,4, ..., n ensembles.

Ce qui consiste à distribuer tous les éléments de A par rapport à chaque élément de B.

On peut écrire : A $\times$ B= $\{(x;y), x \in A \text{ et } y \in B\}$

Exemple : Soit $A=\{1;2;3\}$ et $B=\{a;b\}$.

On a $A \times B = \{(1;a);(2;a);(3;a);(1;b);(2;b);(3;b)\}$ et $B \times A = \{(a,1);(a;2);(a;3);(b,1);(b;2);(b;3)\}$

Remarques :

- $A \times B \neq B \times A$: l'ordre d'un produit cartésien est important
- Si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, alors $A \times B = \emptyset$
- Le produit d'un ensemble infini par un ensemble infini est infini. ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ représente l'ensemble de tous les couples de nombres réels)

Définition :

Soit A est un ensemble fini et non vide et k est un entier naturel non nul.

On note : $A^k = A \times A \times \ldots \times A$ (k facteurs)

Les éléments de A^k sont des couples, des triplets, des quadruplets ...
De façon générale, on parle de **k-uplet** (ou **k-listes**) ordonnés.

Les coordonnées dans le plan ou dans l'espace offrent de bons exemples d'emploi.

Exemple : On dispose de trois dés tétraédriques (un bleu, un rouge, un jaune) dont les faces sont marquées de 1 à 4.

On jette les trois dés et on note dans l'ordre le résultat obtenu sur le dé bleu, puis rouge, puis jaune.

Si $A=\{1;2;3;4\}$ alors , A^3 est l'ensemble de tous les résultats possibles.

3) PRINCIPE MULTIPLICATIF

Propriétés :

- Soit A et B deux ensembles finis et non vides . On a alors Card(A × B)=Card(A) × Card(B) .
- Soit A un ensemble fini et non vide et k un entier naturel non nul.
  Si Card (A)= n , alors card(A^k)= n^k .

Résultat immédiat en utilisant la distributivité

Exemple : On reprend l'exemple précédent . Card(A^3) $=4^3=64$

Il y a donc 64 résultats possibles pour l'expérience envisagée.

Dans la pratique, ce principe s'applique souvent en utilisant un schéma à cases :

Si une situation comporte k étapes offrant respectivement n_1 , n_2 , ..., n_k possibilités alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \ldots \times n_k$

Exemple : Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

D'après le principe multiplicatif, on a :

	Lettre 1	Lettre 2	Chiffre	
Nombres de possibilités	26	25	9	26 × 25 × 9=5850

Exemple : **Nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments** **(Exemple à connaître)**

Soit A un ensemble tel que card(A)= n . Combien de parties différentes contient A ?

Il suffit pour chaque élément de se poser la question appartient-il (noté 1) ou non (noté 0) à la partie choisie.

D'après le principe multiplicatif, on a :

	Élément 1	Élément 2	...	Élément n	
Nombres de possibilités	2	2	...	2	$2\times2\times\ldots\times2=2^n$

4) ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

Définition :

Soit un ensemble A de cardinal n et un entier $k \leqslant n$.
Un arrangement de *k* éléments choisis parmi *n* est un k -uplet d'éléments distincts de A.

Exemple : Soit un ensemble $A=\{1;2;3;4;5;6\}$

un arrangement de 3 éléments de A sera par exemple (1 ; 4 ; 2) ou (1 ; 6 ; 3).

(1 ; 4 ; 4) n'est pas un arrangement, c'est un 3-uplet (un triplet) dont les éléments qui le composent ne sont pas distincts.

Propriété :

Soit un ensemble A de cardinal n et un entier $k \leqslant n$.
Le nombre d'arrangements de k éléments de A est : $n\times(n-1)\times \ldots \times (n-k+1)$.
On le note A_n^k .

A_n^k est le produit de k entiers consécutifs décroissant à partir de n .

Preuve :

Ce résultat se montre facilement avec un schéma à cases :

D'après le principe multiplicatif, on a :

	Élément 1	Élément 2	...	Élément k	
Nombres de possibilités	n	$n-1$	...	$n-(k-1)=n-k+1$	$n\times(n-1)\times \ldots \times (n-k+1)$

Exemple : $A_8^3=8\times7\times6=336$

Remarque : On utilise les arrangements en cas de choix successifs de p éléments pris parmi n , sans répétition.

Définition :

Soit un ensemble A de cardinal *n*.
Une permutation de A est un arrangement de E ayant n éléments.

Exemple : Soit un ensemble $A=\{1;2;3;4;5;6\}$

(1;3;2;6;5;4) et (6;5;4;2;1;3) sont deux permutations de A.

Définition :

On note $n!$ (lire « **factorielle n**») le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

Par convention, on pose $0!=1$.

On a alors $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Propriété :

Soit un ensemble A de cardinal *n*.
Le nombre de permutations de A est $n!$.

Immédiat, car une permutation est un arrangement de A ayant n éléments.

Remarque : On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition.

5) COMBINAISONS

Définition :

Soit A un ensemble de cardinal n.
Une partie à k éléments de A est **une combinaison** de k éléments de A.

Exemple : Soit un ensemble $A=\{1;2;3;4;5;6\}$

$\{2;5;6\}$ et $\{6;5;2\}$ sont deux combinaisons identiques à 3 éléments de A.

Remarque : Le fait d'utiliser des accolades signifie que l'ordre d'écriture n'est pas important.

Propriété :

Soit un ensemble A de cardinal *n* et un entier $k\leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de k éléments de A est : $\dfrac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

On le note $\binom{n}{k}$ (notation que nous utiliserons) ou parfois C_n^k .

$\binom{n}{k}$ se lit " k parmi n ".

On l'appelle **coefficient binomial** .

Preuve :

Dénombrons les arrangements de k éléments d'un ensemble fini A de cardinal n .
Un arrangement est caractérisé par :
- Le choix d'une partie de A à k éléments (il y a $\binom{n}{k}$ choix de telles parties)
- La façon d'ordonner les k éléments de la partie choisie (il y a $k!$ façons)

On en déduit que : $A_n^k=k!\binom{n}{k}$ $\Leftrightarrow$ $\binom{n}{k}=\dfrac{A_n^k}{k!}$

Exemple : Soit un ensemble $A=\{1;2;3;4;5;6\}$

Il y a $\binom{6}{3}=\dfrac{6!}{3!3!}=20$ combinaisons à 3 éléments de A.

Remarque : L'ensemble des parties d'un ensemble A à n éléments est constitué des parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, …, n éléments.

Ainsi le nombre de parties de A est $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. Or nous avons déjà vu que le nombre de parties de A est 2^n.

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Propriétés :

- Pour tout entier naturel n, et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- De plus, si $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors : $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

Preuve : *deuxième point exigible*
Pour chacune de ces propriétés, deux démonstrations sont proposées : une démonstration par le calcul et une démonstration par une méthode combinatoire.

- **Démonstration par une méthode combinatoire :**

$\binom{n}{k}$ représente le nombre parties de k éléments d'un ensemble A à n éléments.
Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire.
Et le complémentaire d'une partie à k éléments comporte $n-k$ éléments.
Donc dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à $n-k$ éléments et il y en a $\binom{n}{n-k}$.

Démonstration par le calcul : $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$

- **Démonstration par une méthode combinatoire :**

Soit A un ensemble à $n+1$ éléments avec $n \geqslant 1$.
Soit a un élément fixé de A. Remarquons que les parties à $k+1$ éléments de A se partagent en deux catégories :

- celles ne contenant pas a (il y en $\binom{n}{k+1}$), car fabriquer une telle partie revient à choisir $k+1$ éléments parmi n.

- celles contenant a (il y en a $\binom{n}{k}$), car fabriquer une telle partie revient à choisir k éléments parmi n.
Or ces deux catégories constituent une partition de l'ensemble des parties à k éléments de A.

D'après le principe additif, on a donc : $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

Démonstration par le calcul :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\times\left(\frac{k+1}{n+1}+\frac{n-k}{n+1}\right)=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\times\frac{n+1}{n+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{k}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3 +	3 =	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

- $\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k \leqslant n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n}=1$
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0}=1$
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :
$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$
« Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »