Raisonnement par récurrence

Ex 1-1 : ***Vrai ou faux***

1) Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n .

2) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=1$.

3) Si une propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=0$.

4) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$, alors elle est héréditaire.

5) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.

6) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.

7) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.

8) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.

Ex 1-2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

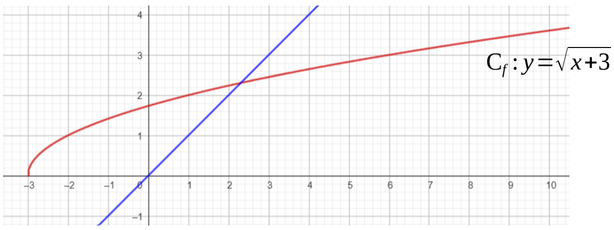
Ex 1-3 :

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur I= $[-3;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+3}$

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+3} \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \in \mathrm{I}$

b) Représenter les premiers termes de la suite sur le graphique ci-dessous :



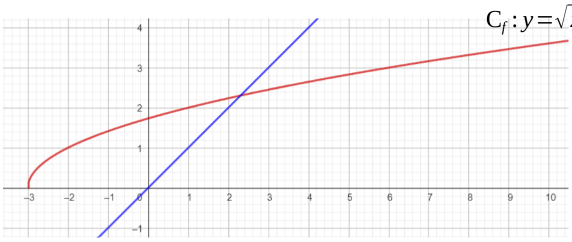
c) Conjecturer le sens de variations de (u_n) , puis démontrer la conjecture.

3) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0=10 \\ v_{n+1}=\sqrt{v_n+3} \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n \in \mathrm{I}$

b) Représenter les premiers termes de la suite sur le graphique ci-dessous :

$C_f : y=\sqrt{x+3}$

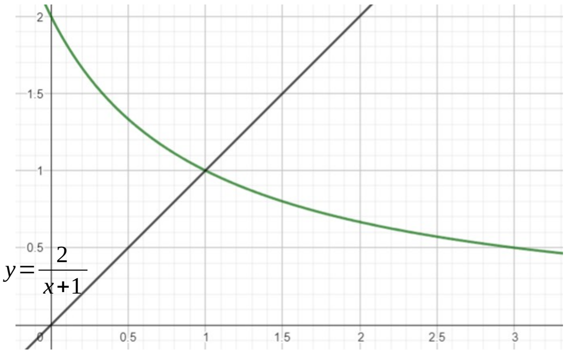


c) Conjecturer le sens de variations de (v_n) , puis démontrer la conjecture.

4) Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} w_0=3 \\ w_{n+1}=\dfrac{2}{w_n+1} \end{cases}$

a) Représenter les premiers termes de la suite sur le graphique ci-dessous :

$C_g : y=\dfrac{2}{x+1}$



b) Que peut-on dire du sens de variation de la suite (w_n) ?

5) Conclure.

Comportement global d'une suite : rappels de première

Ex 1-4 : ***Vrai ou faux***

1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.

2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$

4) Si $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$, alors (u_n) est décroissante.

5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

6) Si pour tout entier n , $0<u_n \leqslant 4$, alors :
a) (u_n) est minorée par 4 .

b) (u_n) est minorée par 0.

c) (u_n) est minorée par 1.

d) 5 est un majorant de (u_n)

e) (u_n) est bornée.

f) (u_n) admet une infinité de majorants.

7) Une suite est toujours soit minorée, soit majorée.

8) Un majorant d'une suite est toujours un terme de la suite.

9) Une suite croissante est toujours minorée.

10) Une suite minorée est toujours croissante.

11) Une suite croissante n'est pas majorée.

12) Si pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant n+1$

a) (u_n) est minorée.

b) (u_n) est majorée.

c) (u_n) est monotone.

13) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.

c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.

d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

14) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

15) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n) .

<u>Ex 1-5 :</u> Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.

1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égale à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+5}{4x+1}$ avec $u_0 > 0$

5) $u_n = 7^{n-3}$

6) $u_n = 2n - 5$

7) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

8) $u_n = \frac{1}{n+1}$

9) $u_0 = 8$, $u_1 = 10$, $u_2 = 13$, $u_3 = 17$, $u_4 = 22$ …

10) $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 21$, $u_3 = 85$ ...

Ex 1-6 : Étudier la monotonie

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n).

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-3n+5$

2) $u_n=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$

4) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n$

5) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

6) $u_n=\frac{n^2}{3^n}$

7) $u_n=n^3-12n^2+45n$ (Aide : étudier une fonction)

8) $u_n = \dfrac{n^2 - 4}{n^2 + 1}$ (Aide : étudier une fonction)

9) (u_n) est la suite des coefficients directeurs des droites d_n d'équation $3x - ny + 5n = 0$

Ex 1-7 : Suites bornées

Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n = 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1$

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{5} + 4$

3) $u_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 2}$

4) $u_n = 3 - 4\sin(5n)$

5) $u_n = \dfrac{3^n}{4} - 1$

6) $u_n=1-\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}$ (pour $n\geqslant 2$)

7) $u_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{4}{n}\right)$ (pour $n\geqslant 2$)

8) $u_n=\frac{3+\sin n}{2-\sin n}$

Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 1-8 : ***Vrai ou faux***

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$

2) Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers L.

3) Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où $A\in\mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

4) Si tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$, où $B\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.

6) Une suite peut avoir plusieurs limites.

7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

Ex 1-9 : ***Logique***

1) Soit la proposition

(P1) : « toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée »

a) (P1) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P1) est-elle vraie ?

2) Soit la proposition
(P2) : « toute suite qui tend vers + ∞ n'est pas majorée »
a) (P2) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P2) est-elle vraie ?

<u>Ex 1-10 :</u> ***Suite positive à partir d'un certain rang***

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

<u>Opérations sur les limites</u>

<u>Ex 1-11 :</u> ***Utiliser les opérations sur les limites***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=-2n^2+\frac{e}{n}$

2) $u_n=300-n^2\sqrt{2}$

3) $u_n=\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(5-\frac{1}{n^3}\right)$

4) $u_n=\frac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$

5) $u_n=\frac{n+2}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3}$

6) $u_n=\frac{2+\frac{3}{n}}{5-\frac{2}{n^2}}$

7) $u_n=\frac{5n^2}{10-\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right)}$

Ex 1-12 : ***Lever une indétermination***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n).

1) $u_n=\frac{n^5}{5}-\frac{n^2}{2}-\text{e}$

2) $u_n=\frac{1}{2}n^4-2n^3+5n^2-\frac{1}{4}$

3) $u_n=\frac{n^2-3n+1}{n^2+4}$

4) $u_n=\frac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$

5) $u_n=\sqrt{n}-n$

6) $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

7) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Ex 1-13 : ***Trouver des suites***

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite + ∞ telles que :

a) $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = +\infty$

b) $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = -\infty$

c) $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 1$

d) $u - v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$, telles que :

a) $\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = +\infty$

b) $\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 0$

c) $\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 1$

d) uv n'a pas de limite.

Ex 1-14 : ***Raisonnement par l'absurde***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente . Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$.

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

Limites et comparaison

Ex 1-15 : ***Théorème de comparaison ou d'encadrement***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n = \frac{3\sin(n)}{n^2}$

2) $u_n = \frac{3+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$

3) $u_n=3(-1)^n+n$

4) $u_n=\frac{2\cos(n)}{n}+\frac{\sin(n)}{2n}$

5) $u_n=\frac{5n+(-1)^{n+1}}{2n+(-1)^n}$

6) $u_n=-3n^3+3\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

<u>Ex 1-16 :</u> ***Avec la fonction Ex 1-ponentielle***

On considère la suite (u_n) définie *par* $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{n+2}$

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0<u_n\leqslant 1$

2) En déduire que, pour tout entier naturel n , $0<u_{n+1}\leqslant\frac{e}{n+2}$

3) Montrer que la suite (u_n) converge.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

<u>Ex 1-17 :</u> ***Séries***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant u_n\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}$$

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\geqslant\sqrt{\frac{n}{2}}$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Limite d'une suite géométrique

Ex 1-18 :

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n).

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

2) $u_n=1{,}00001^n$

3) $u_n=3+\left(\frac{11}{12}\right)^n$

4) $u_n=\left(-\frac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n=\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{11}{12}\right)^n$

6) $u_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

7) $u_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n=\frac{e^n-4^n}{4^n-1}$

9) $u_n=\frac{2^{n+1}+5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 1-19 : ***Nombre rationnel***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=3,777777\ldots$ (n chiffres 7)
$u_1=3,7$, $u_2=3,77$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que 2,47474747… est un nombre rationnel.

Convergence de suites monotones

Ex 1-20 : ***Vrai ou faux***

1) Si (u_n) converge vers L et si pour tout entier naturel n , $u_n>2$, alors $L>2$.

2) Si (u_n) est une suite positive telle que, pour tout entier naturel n , $u_n\leqslant n$, alors la suite (u_n) converge.

3) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

4) Toute suite croissante et minorée est convergente.

5) Toute suite qui tend vers + ∞ est croissante à partir d'un certain rang.

6) Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.

7) Toute suite convergente est monotone.

8) Toute suite qui converge vers 0 est soit croissante et négative, soit décroissante et positive.

Ex 1-21 : ***Étudier une suite monotone minorée***

(u_n) est la suite définie par $u_0=10$ et, pour tout entier naturel n ,
$u_{n+1}=\dfrac{2}{5}u_n+3$.

1) Montrer que la suite est minorée par 5.

2) Montrer que (u_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

<u>Ex 1-22 :</u> *Étudier une suite décroissante non minorée*

(u_n) est la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1}=-(u_n)^2+u_n-1$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante.

2) Montrer que (u_n) n'est pas minorée. (raisonnement par l'absurde)

3) En déduire la limite de la suite (u_n) .

<u>Ex 1-23 :</u>

(u_n) est la suite définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}$.

1) Étude de la convergence de (u_n) .

a) Montrer que , pour tout entier naturel n , $u_n\geqslant 4$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

2) Détermination de la limite de (u_n) .

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-4\leqslant\frac{1}{8}(u_n-4)$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0\leqslant u_n-4\leqslant\frac{1}{8^n}$

c) En déduire la limite de (u_n) .

Ex 1-24 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=n!$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.

2) Monter que (u_n) n'est pas majorée.

3) En déduire la limite de (u_n) .

Les grands classiques déjà vus en première
Suites arithmético-géométriques et suites homographiques

Ex 1-25 : Suite arithmético-géométrique
Utiliser une suite auxiliaire géométrique

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3 \end{cases}$

Remarque :
Une suite arithmético-géométrique est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1}=a\,u_n+b$ avec $a\neq 0$

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

2) À l'aide de la calculatrice :
a) Déterminer une valeur approchée de u_{15} à 10^{-6} près.

b) Que remarque-t-on lorsque l'on soustrait 6 à chaque terme de la suite u ?

3) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-6$.
a) Démontrer que v_n est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Retrouver alors u_{15} .

4) Calculer $S=\sum_{i=0}^{20} v_i$ et $T=\sum_{i=0}^{20} u_i$

Ex 1-26 : Suite homographique

Situation 1 : utiliser une suite auxiliaire arithmétique

Remarque :
Une suite homographique est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1}=\dfrac{a u_n+b}{c u_n+d}$ avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$.

1) Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).

2) Montrer que la suite prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que la suite est arithmétique.

b) En déduire une Expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Justifier les conjectures de la question 1).

4) a) Compléter la fonction python ci-dessous permettant de déterminer le plus petit indice n tel que $u_n<10^{-p}$

```
def seuil(p):
    u=........
    n=........
    while u>=10**(........):
        u=........
        n=n+1
    return n
```

b) Utiliser cette fonction pour déterminer le plus petit indice n tel que $u_n<0,01$.

Ex 1-27 : Suite homographique

Situation 2 : utiliser une suite auxiliaire géométrique

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{4+u_n} \end{cases}$

et la suite (v_n) définie tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

1) a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :
Quelles formules ont été saisies dans les cellules B3 et C2 puis tirées vers le bas :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	0	-0,33333333
3	1	0,75	-0,06666667
4	2	0,947368	-0,01333333
5	3	0,989362	-0,00266667
6	4	0,997868	-0,00053333
7	5	0,999573	-0,00010667
8	6	0,999915	-2,1333E-05
9	7	0,999983	-4,2667E-06
10	8	0,999997	-8,5333E-07
11	9	0,999999	-1,7067E-07

En B3 :

En C2 :

b) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

c) En calculant quelques quotients $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, conjecturer la nature de la suite (v_n) .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une Expression de v_n en fonction de n .

c) Exprimer u_n en fonction de v_n .

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3-3\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

e) Déterminer en justifiant $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

f) Que peut-on alors dire de la conjecture faite à la question 1) b) ?

Quelques algorithmes incontournables

Ex 1-28 : Avec des listes

algorithme a

```
1 n=int(input("n="))
2 u=[ ]
3 for i in range(0,n+1):
4    u.append(2*i**2-3*i+1)
5 print (u)
```

algorithme b

```
1 n=int(input("n="))
2 u0=float(input("u0="))
3 u=[u0]
4 for i in range(1,n+1):
5    u.append(2*u[i-1]**2-3*u[i-1]+1)
6 print (u)
```

Déterminer le rôle de ces deux algorithmes.

Ex 1-29 : Somme de termes consécutifs

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3,1 et de premier terme $u_0=2,7$. Pour calculer $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, on utilise la fonction incomplète écrite en python ci-dessous :

```
1 def somme1(n):
2    U=2.7
3    S=………
4    for i in range(1,………):
5       U=U+3.1
6       S=………
7    return(………)
```

a) Compléter cette fonction.

b) Que saisir en ligne 8 ou dans la console pour obtenir la somme S_{21} ?

2) On considère la fonction écrite en python ci-dessous :

```
1 def somme2(u0,r,M):
2    T=0
3    U=u0
4    while U<=M:
5       T=T+U
6       U=U+r
7    return(T)
```

Que saisir en ligne 8 ou dans la console pour obtenir la somme $T=10+13+16+\ldots+145$? Déterminer cette somme.

3) Ecrire une fonction somme3(u0,q,M) permettant de calculer la somme $R=6400+3200+1600+\ldots+25$, puis déterminer cette somme en écrivant print(somme3(6400,1/2,25)).

Ex 1-30 : Algorithme de seuil – proportion de filles

Un concours scientifique est organisé depuis 2021.
Les filles ne représentaient alors qu'un quart des participants .
Entre 2021 et 2025, on a constaté une augmentation moyenne annuelle de la proportion des filles participant à ce concours de 12 %.
On Ex 1-trapole que la proportion de filles va continuer de progresser ainsi pendant 10 ans.

1) a) Quelle était la proportion de filles en 2022.

b) Pour tout entier naturel n , on note p_n la proportion de filles de l'année $2021+n$.
Pour $n<10$, Ex 1-primer p_{n+1} en fonction de p_n .

c) En déduire la nature de la suite (p_n) .

2) On considère la fonction Proporfilles écrite en python ci-dessous :

```
1 def Proporfilles(t):
2    p=0.25
3    n=0
4    while p<t:
5       p=1.12*p
6       n=n+1
7    return n+2021
```

Quelle est la valeur de Proporfilles(0,5) ? Interpréter ce résultat.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 1-31 : ***Baccalauréat Centres étrangers 6 juin 2024 sujet 2 - ex 4***

Avec des racines carrées – seuil avec abs – récurrence – g(L)=L

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n):
    u=5
    i=0
    ℓ =(1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ)>=10**(-n):
        u=sqrt(u+1)
        i=i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de* x.

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil (2)`.

b. La valeur renvoyée par `seuil (4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

À propos des exercices des parties « EN ROUTE VERS LE BAC »

Les exercices de type bac sont des exercices bilans portant sur le chapitre concerné.

Je vous invite à les faire soigneusement à la fin de chaque chapitre . Pour la plupart d'entre eux vous disposez d'environ une heure le jour du bac.
Ils ont été sélectionnés afin de couvrir la plupart des points méthodes et des rédactions classiques attendus le jour de l'épreuve.

Je n'ai pas proposé les corrections dans ce manuel car elles sont toutes disponibles de manière très détaillée sur Internet.
Le site le plus sérieux étant le site de l'APMEP

Ex 1-32 : *Baccalauréat Polynésie 19 juin 2024 sujet 1 - ex 4*

Suite homographique – python – récurrence – unicité de la limite

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
   Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

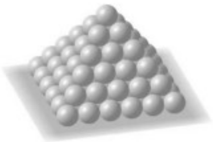
   b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.
5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Ex 1-33 : *Baccalauréat Polynésie 5 septembre 2024 sujet 1 - ex 3*

Somme – récurrence -python

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
- le 3e étage possède 9 boules;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Ex 1-34 : *Baccalauréat Métropole 11 septembre 2024 sujet 1 - ex 3*

Suite arithmético-géométriques et homographiques – théorème des gendarmes – limites – exp – Python – unicité de la limite

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.
Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Ex 1-35 : ***Baccalauréat Amérique du Nord 27 mars 2023 sujet 1 - ex 4***

Récurrence – unicité de la limite – python

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$
Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\,;\,+\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2{,}2$.
   b. Établir que pour tout entier naturel n,
$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$
2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

   a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L?

   b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Ex 1-36 : ***Baccalauréat Asie 24 mars 2023 sujet 2 - ex 3***

Suite arithmético-géométrique – récurrence – python (liste)

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\,(0,995^n + 1)$.

c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1 def noyaux (n) :
2     V =6*10**21
3     L=[V]
4     for k in range (n) :
5         V= ...
6         L.append(V)
7     return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

Ex 1-37 : ***Baccalauréat Amérique du Sud 27 septembre 2023 sujet 2 - ex 3***

Théorème comparaison en l'infini – recurrence – python (liste) – conjecture

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit n un entier naturel.

   Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
    |    u= ...
    return u
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

   c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

   a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

   La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

   Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

   Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.

   Démontrer cette conjecture.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.