Linéarité de l'espérance

Ex 14-1 : ***Appliquer la linéarité***

Soit X une variable aléatoire telle que E(X)=5 et V(X)=1 et Y une autre variable aléatoire telle que E(Y)=0 et V(Y)=2.

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

1) Z=2X-7

2) T=X+Y

3) U=-3Y

4) $W=\frac{3(X-1)}{4}$

Ex 14-2 : ***Avec la loi binomiale***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,2$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,1$.

1) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X+Y.

2) Calculer E(X+Y)

Ex 14-3 : ***Avec des variables aléatoires indépendantes***

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
On sait que V(X)=3 et V(Y)=5
Justifier que l'on peut calculer V(X+Y) et donner cette valeur.

Ex 14-4 : ***Lancer de trois dés et moyenne***

On lance trois fois un dé équilibré . Pour tout $i\in\{1,2,,3\}$, on note X_i la variable aléatoire donnant la valeur de la face supérieure du dé obtenue au i -ème lancer.

1) Déterminer la loi de X_1 , puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$

2) On note $S_3=X_1+X_2+X_3$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de S_3 ?

b) Calculer si possible $E(S_3)$ et $V(S_3)$.

3) On note $M_3=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

a) Quelles sont les valeurs possibles de M_3 ?

b) Calculer si possible $E(M_3)$ et $V(M_3)$.

Ex 14-5 : ***Lancer de neuf dés et variable aléatoire de gain***

On considère un jeu consistant à lancer 9 fois un dé.
À chaque lancer, on gagne 10 euros si on obtient « 1 » ou « 2 » et 5 euros sinon.
La participation au jeu est 60 euros.

1) Pour tout $i\in\{1,2,\ldots,9\}$, on note X_i la variable aléatoire qui prend pour valeurs la somme gagnée au i -ème lancer.
Déterminer pour tout $i\in\{1,2,\ldots,9\}$ la loi de X_i et calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$

2) On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (il peut être négatif) .
a) Exprimer G en fonction des variables aléatoires X_i .

b) Calculer le gain que l'on peut espérer et interpréter le résultat.

3) Déterminer la variance de G.

Ex 14-6 : ***Variances et indépendance***

Quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4, sont placées dans une urne.
On tire une boule dans l'urne, on ne la remet pas, puis on tire une deuxième boule.
On appelle X_i pour $i\in\{1,2\}$, la variable aléatoire qui associe au i -ème tirage le numéro de la boule tirée.

1) Les deux tirages sont-ils indépendants ?

2) Déterminer la loi de X_1 .

3) a) En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la loi de X_1+X_2

b) En déduire $E(X_1+X_2)$ et $V(X_1+X_2)$

4) Déterminer $E(X_1)$, puis en déduire $E(X_2)$.

5) La loi de X_2 est-elle équirépartie ?

6) Calculer $V(X_1)$ et $V(X_2)$, puis comparer $V(X_1+X_2)$ avec $V(X_1)+V(X_2)$

Ex 14-7 : ***Produit de variables aléatoires et espérance***

Quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4, sont placées dans une urne.
On tire une boule dans l'urne, on ne la remet pas, puis on tire une deuxième boule.
On appelle X_i pour $i\in\{1,2\}$, la variable aléatoire qui associe au i -ème tirage le numéro de la boule tirée.

1) a) Déterminer la loi de de $X_1 \times X_2$ et son espérance.

b) A-t-on $E(X_1 \times X_2) = E(X_1)E(X_2)$?

2) On considère maintenant, qu'avant de tirer la deuxième boule, on remet la première dans le sac.
a) Les deux tirages sont-ils indépendants ?

b) Déterminer la loi de $X_1 \times X_2$ et son espérance.

c) Comparer $E(X_1 \times X_2)$ et $E(X_1) \times E(X_2)$

Inégalités et valeurs absolues

Ex 14-8 : ***Exprimer sous la forme*** $(|X - a| \geqslant \delta)$

Soit X une variable aléatoire.
Exprimer les événements ci-dessous sous la forme $(|X - a| \geqslant \delta)$

1) ($X - 4 \geqslant 4$ ou $X - 4 \leqslant -4$)

2) ($X - a \geqslant 5$ ou $X - a \leqslant -5$)

3) ($X \geqslant 4$ ou $X \leqslant 0$)

4) « La distance entre X et 3 est supérieure ou égale à 1 »

5) $((X-1)^2 \geqslant 25)$

Ex 14-9 : ***Avec l'événement contraire***

Soit X une variable aléatoire.
Exprimer l'événement contraire à l'aide d'une valeur absolue.

1) $(2 \leqslant X \leqslant 6)$

2) $(-1 < X < 7)$

3) $(2 + X > 3 > -2 + X)$

Concentration-Loi des grands nombres

Ex 14-10 : ***Application directe***

Soit X une variable aléatoire d'espérance 40 et de variance 8.
1) Donner une majoration de $P(|X - 40| \geqslant 5)$

2) En déduire une minoration de $P(35<X<45)$

3) Donner une majoration de la probabilité que X s'écarte de son espérance d'au moins 10.

<u>Ex 14-11 :</u> ***Écarts de X à E(X) de quelques σ (X)***

Soit X une variable aléatoire . Déterminer une majoration de chaque probabilité suivante :

1) a) $P(|X-E(X)|\geqslant\sigma(X))$

b) $P(|X-E(X)|\geqslant 2\sigma(X))$

c) $P(|X-E(X)|\geqslant 3\sigma(X))$

2) Déterminer un entier naturel n tel que la probabilité que X s'éloigne de E(X) de n fois son écart type soit inférieure à 1 %.

3) Quel constat peut-on faire ?

<u>Ex 14-12 :</u> ***Trouver un intervalle de fluctuation***

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 50.

1) Trouver un entier $\delta>0$, tel que $P(|X-10|\geqslant\delta)\leqslant 0,2$

2) En déduire un intervalle de fluctuation au seuil de 80 %.

3) Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 90 %.

<u>Ex 14-13 :</u> ***En lançant 6 fois une pièce***

On lance 6 fois une pièce équilibrée .
Pour tout $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on obtient pile au i -ème lancer et 0 dans la cas contraire.
On note $S_6=X_1+X_2+\ldots+X_6$
1) Justifier que pour tout $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$, X_i suit une loi de Bernoulli, puis calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

2) En déduire $E(S_6)$ et $V(S_6)$

3) Comment aurait-on pu retrouver directement ce résultat ? Que représente S_6 ?

4) Déterminer un majorant de $P(|S_6-3|\geqslant 2)$, puis interpréter le résultat.

5) On note $M_6=\frac{S_6}{6}$

a) Que représente M_6 ?

b) Déterminer $E(M_6)$ et $V(M_6)$.

c) Calculer $P\left(\left|M_6-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{3}\right)$

Ex 14-14 : ***En lançant 1000 fois une pièce : déterminer une taille d'échantillon***

1) On lance 1000 fois de suite aléatoirement une pièce non truquée. Montrer que l'événement « la moyenne de FACE est strictement comprise entre 0,45 et 0,55 » a une probabilité supérieure à 0,9

2) Combien de fois faut-il lancer une pièce non truquée afin d'être certain à 99 % que la moyenne de FACE est comprise entre 0,45 et 0,55.

Ex 14-15 : ***Enquête dans un ville : déterminer une taille d'échantillon***

Dans une ville de 30000 habitants lors d'une consultation sur la rénovation de la piscine municipale, 70 % des personnes consultées ont émis un avis positif.

On interroge aléatoirement n (où $n \in \mathbb{N}^*$) personnes et on note X_i pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la i ème personne interrogée est favorable au projet et 0 dans le cas contraire.

1) Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$, donner la loi de X_i , puis son espérance et sa variance.

2) On note M_n la moyenne empirique des variables aléatoires X_i , où $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

a) Déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,05 et un risque de 0,1.

b) De même, déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,01 et un risque de 0,05.

Interpréter ce résultat.

Ex 14-16 : ***Tester un dé : déterminer une taille d'échantillon***

On aimerait savoir si un dé à six faces est truqué.

Pour cela, nous allons en particulier nous intéresser à l'apparition du chiffre « 1 » et on note p la probabilité d'obtenir « 1 ».

On lance n (où $n \in \mathbb{N}^*$) fois le dé et on note M_n la moyenne empirique d'apparition du chiffre « 1 » et S_n le nombre de fois où l'on a obtenu 1 au cours des n lancers.

1) Exprimer M_n en fonction de S_n .

2) En déduire l'espérance et la variance de M_n .

3) On suppose que le dé n'est pas truqué.

4) On lance le dé de l'expérience N fois et on obtient une moyenne de 0,15 . Que peut-on conclure ?

Ex 14-17 : ***421***

Une école organise un jeu pour financer un voyage.

Chaque participant doit verser 9 euros pour participer.

Le jeu consiste à lancer trois dés non truqués .

Si le résultat est un 421, il gagne 108 euros.

1) Déterminer la probabilité de faire un 421.

2) On note G_i le gain algébrique du i -ème participant.

Donner la loi de G_i , puis calculer son espérance et sa variance.

3) On pose $M_n = \dfrac{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}{n}$

Soit δ un réel strictement positif . Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(M_n - E(M_n)) \geqslant \delta$

4) On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'école après la participation de n personnes.

a) Exprimer X_n à l'aide des variables aléatoire G_i

b) Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$

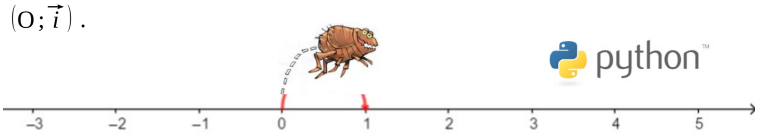
5) On suppose que 200 personnes vont participer.

Donner une minoration de la probabilité que le gain algébrique de l'association soit strictement compris entre 800 et 1600 euros.

Simulation - Python

Ex 14-18 : ***Simulation d'une marche aléatoire***

Une puce se déplace de manière aléatoire sur une droite munie d'un repère $(O;\vec{i})$.



Au départ, elle se trouve à l'origine du repère et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement, soit d'un saut(+1) vers la droite, soit d'un saut (-1) vers la gauche.

Après n sauts, on note D_n le nombre de fois où la puce a effectué un saut vers la droite et X_n l'abscisse de la puce.

1) a) Déterminer la loi de D_n.

b) Exprimer l'espérance et la variance de D_n en fonction de n.

c) Exprimer X_n en fonction de n et de D_n.

d) Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

2) a) Compléter la fonction X(n) écrite en python ci-dessous, afin qu'elle simule la variable aléatoire X_n.

```
from math import *
from random import *

def X(n):
   x=...........
   for i in range(...........):
      a=..............
      if a<........... :
         x=...........
      else:
         x=x+1
   return(x)

```

b) Compléter la fonction Moy(n,N) écrite en python ci-dessous, afin qu'elle revoie la moyenne de X_n suite à une simulation d'un échantillon de taille N de X_n.

```
def moy(n,N):
   s=...........
   for j in range(...........):
      s=...........
   return(...........)

```

c) Lors d'une simulation de K échantillons de taille N de X_n, on obtient K moyennes : $m_1, m_2, \ldots, m_K$.

Compléter la fonction propor(n,N,K,delta) écrite en python ci-dessous, afin qu'elle revoie la proportion de moyennes supérieures en valeur absolue à un réel delta donné, suite à une simulation K échantillons de taille N de X_n.

```
def propor(n,N,K,delta):
   m=...........
   for k in range(K):
      if ............................................. :
         m=.......................
   return(...........)
```

3) a) On exécute 20 fois proportion(1000,100,1000,2)

```
for i in range(20):
   print(propor(100,100,1000,2))
```

On obtient :

0.05 0.039 0.054 0.05 0.036 0.043 0.04 0.049 0.05 0.036
0.055 0.048 0.045 0.047 0.053 0.04 0.047 0.042 0057 0.042

Interpréter les résultats obtenus.

b) Dans un échantillon de taille 100, on note M_{100} la moyenne des 100 valeurs prises par X_{100}.

Déterminer l'espérance $E(M_{100})$ et l'écart type $\sigma(M_{100})$ de M_{100}.

c) Démontrer que pour tout rel $\delta>0$, on a $P(|M_{100}|\geqslant\delta)\leqslant\frac{1}{\delta^2}$

En déduire que $P(|M_{100}|\geqslant 2\sigma(M_{100}))\leqslant\frac{1}{4}$

d) Interpréter le résultat obtenu.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 14-19 : *Baccalauréat Métropole 20 juin 2024 - ex 1*

Proba conditionnelle – proba totale – somme de variables aléatoires – espérance – variance – inégalité de Bienaymé-Tchebychev

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

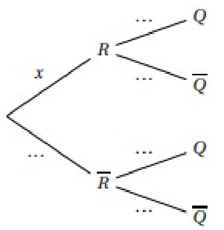
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}(\overline{Q})$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
   b. Montrer que $x = 0,9$.



3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
   c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Ex 14-20 : ***Baccalauréat Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé) - ex 1 Partie B***

Somme de variables aléatoires – espérance – variance – inégalité de Bienaymé-Tchebychev

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Ex 14-21 : ***Baccalauréat Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024 - ex 4 Partie B***

Somme de variables aléatoires – espérance – écart type – inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, ..., M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.
   Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   a. Montrer que cette condition est équivalente à :
   $$P\left(|S-200| \geqslant 1\right) \leqslant 0{,}1.$$
   b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.Bienaymé-Tchebychev