

TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

CONCENTRATION – LOI DES GRANDS NOMBRES - L'ESSENTIEL DU COURS

MATH SPÉ chapitre 14 :

http://pierrelux.net

Transformation affine de variables aléatoires :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.

On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par X . La variable aléatoire $Y = aX + b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

espérance et variance :

$$\text{On a : } E(aX+b) = aE(X)+b \quad V(aX+b) = a^2V(X)$$

Somme de deux variables aléatoires :

Soit X et Y deux variables aléatoires.

$X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles des valeurs de X et de Y .

Espérance :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Cette propriété et $E(aX) = aE(X)$ caractérisent la linéarité de l'espérance.

Variance :

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à deux expériences aléatoires telles que les conditions de réalisation sont **indépendantes**. On a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, on peut avoir $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychef :

Delta minuscule

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

$[E(X) - \delta; E(X) + \delta]$ est un **intervalle de fluctuation**.

En utilisant l'événement contraire on obtient :

$$P(|X - E(X)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(E(X) - \delta < X < E(X) + \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Loi des grands nombres et loi Binomiale :

On considère un **schéma de Bernoulli** constitué de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p .

Pour tout $i \in [1, 2, \dots, n]$, on note X_i la variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , associée à la i -ème épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 dans le cas contraire.
On a donc $P(X_i = 1) = p$

- La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves.
- S_n suit la **loi binomiale** de paramètres n et p .

Moyenne empirique :

La probabilité que les valeurs prises par S_n s'écartent d'au moins δ de son espérance np est d'autant plus petite que δ est grand.

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , la variable aléatoire

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

Soit δ un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n et M_n , on obtient :

$$P(|S_n - np| \geq \delta) \leq \frac{np(1-p)}{\delta^2} \text{ et } P(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Loi des grands nombres :

$$E(S_n) = nE(X) \text{ et } V(S_n) = nV(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \text{ et } V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

Inégalité de concentration :

Soit une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience.

On répète n fois cette expérience de manière **indépendante**.

On obtient alors un **échantillon** de taille n composé de n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , suivant toute la même loi et donc d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Pour tout réel δ strictement positif, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand le taille de l'échantillon tend vers l'infini

Ce qui s'écrit de manière mathématiques $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$