

INTÉGRALES

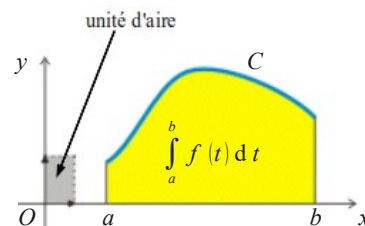
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(t)dt$ ".

- La variable t est appelée variable "muette".

On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

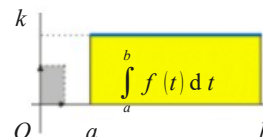
Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm^2 .

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a; b]$ le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemples :

- Si $a=b$, alors $\int_a^b f(t) dt = 0$.

- Pour $k > 0$, $\int_a^b k dt = k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.

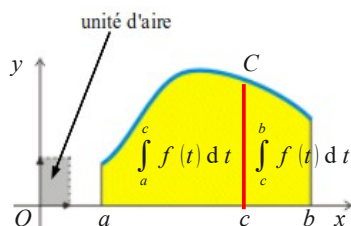


B) RELATION DE CHASLES

Propriété : admise

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés : admise

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. On a :

$$\int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

D) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$:

- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a \leq b$ on peut intégrer l'inégalité $f \leq g$ sur $[a; b]$.

Preuve : preuve de la deuxième propriété.

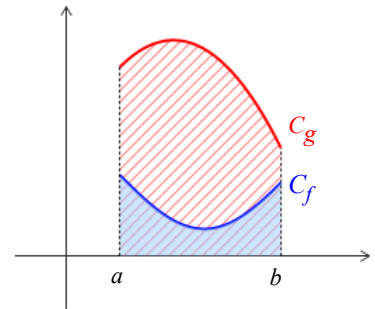
Pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$

$a \leq b$, la propriété précédente permet donc d'affirmer que $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$

Ainsi $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Remarque :

L'inégalité $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :



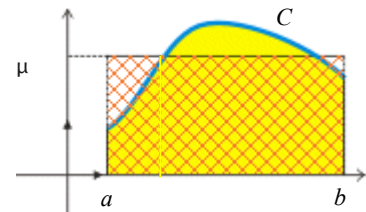
E) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b .

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t) dt$.



2) ÉTUDE DE $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a .

Preuve : idée de preuve (Cas où f est croissante) exigible

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans $[a; b]$ par $T(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$

Si $h > 0$, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ correspond à l'aire sous la courbe C_f entre x_0 et $x_0 + h$.

(Si $h < 0$, on raisonne de même avec $F(x_0) - F(x_0 + h)$)

Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$

On a alors :

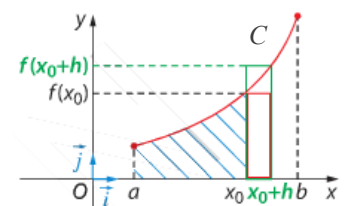
$$h f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h f(x_0 + h) \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0 , on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f(x_0)$$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

L'unicité résulte du fait que $F(a) = 0$.



Remarque :

Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I .

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Preuve : exigible

On a vu que $x \mapsto H(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Soit F une primitive de f sur I , on a donc : $F(x) = H(x) + k = \int_a^x f(t) dt + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } F(a) = \int_a^a f(t) dt + k = 0 + k = k \quad \text{et} \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt + k$$

$$\text{Ainsi } F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + k - k = \int_a^b f(t) dt$$

Remarque : On note aussi $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Preuve : idée de preuve (Cas d'un intervalle fermé en admettant que f a un minimum)

On suppose que f est définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ et que f admet un minimum m sur $[a; b]$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a; b]$.

Elle admet donc une primitive G sur $[a; b]$.

On définit alors la fonction F sur $[a; b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$

F est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout $x \in [a; b]$: $F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a; b]$.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE**Théorème-définition :**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous réels a et b de I , la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t) dt$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \text{ on a : } \int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0$$

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

4) INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Preuve : *exigible*

On sait que u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ de dérivées u' et v' continues sur $[a; b]$. On en déduit que $u'v + uv'$ est continue sur $[a; b]$. On sait aussi que $(uv)' = u'v + uv'$.

On peut donc dire que uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a; b]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) v'(x) + u'(x) v(x) dx &= [u(x) v(x)]_a^b \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) v'(x) dx + \int_a^b u'(x) v(x) dx &= [u(x) v(x)]_a^b \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) v'(x) dx &= [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \end{aligned}$$

Remarque :

On applique cette formule lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de deux fonctions à condition que $\int_a^b u'(x) v(x) dx$ soit plus facile

à calculer que $\int_a^b u(x) v'(x) dx$, ce qui est le cas par exemple dans les situations suivantes :

- une fonction polynôme u et une fonction sinus ou cosinus
- une fonction polynôme u et une fonction logarithme
- une fonction exponentielle u et une fonction sinus ou cosinus
- une fonction sinus ou cosinus u et une fonction exponentielle

Il faut parfois répéter plusieurs fois cette méthode.

Exemple :

Calculer $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$

Ce qui donne $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin(x)$

u et v sont bien dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les dérivées u' et v' sont bien continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx = [x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [x \sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$