Intégrale d'une fonction continue et positive

Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 13-1 : ***Vrai ou faux***

1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.

2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.

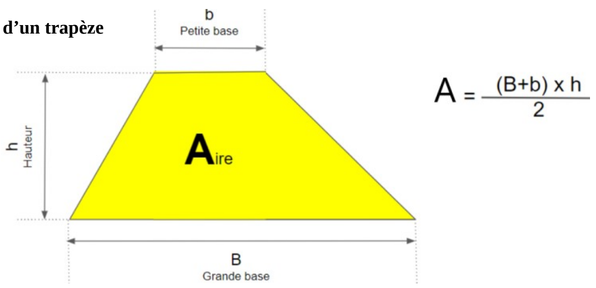
3) Le résultat de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dépend de x .

4) Si f est une fonction positive et si $a<b$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être strictement négative.

Ex 13-2 :

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a;b]$, puis calculer son intégrale sur $[a;b]$.

Aide : aire d'un trapèze

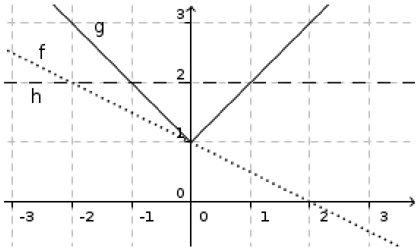


1) $f(x)=3x-1$ sur $[2;5]$

2) $f(x)=|x-3|$ sur $[1;4]$

Ex 13-3 : ***À partir d'une représentation graphique***

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1;1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



<u>Ex 13-4 :</u> ***Avec une fonction affine par morceaux***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x\leq 0 \\ x+2 \text{ si } 0<x\leq 2 \\ -\dfrac{3}{2}x+7 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2\,;4]$.

2) Déterminer $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}\,x$

<u>Ex 13-5 :</u> ***Avec un demi-cercle***

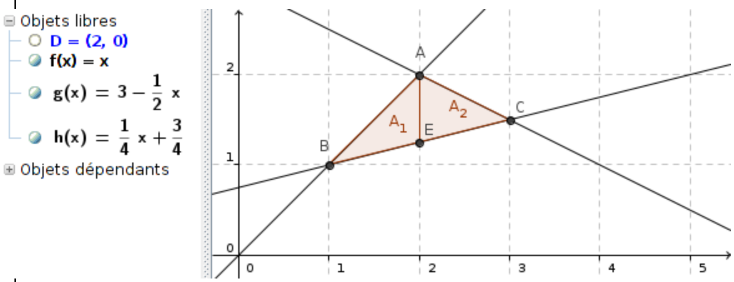
Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.

2) Montrer que C_f est un demi-cercle.

3) Déterminer $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$

<u>Ex 13-6 :</u>



1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

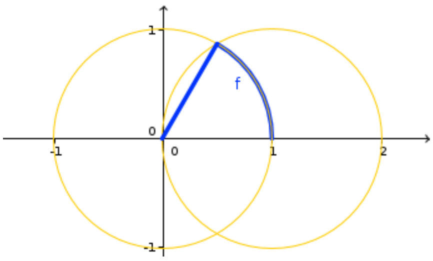
2) En calculant $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ et $\int_{1}^{2} h(x)\,\mathrm{d}\,x$ déterminer l'aire A_1 .

3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

<u>Ex 13-7 :</u>

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)

Déterminer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

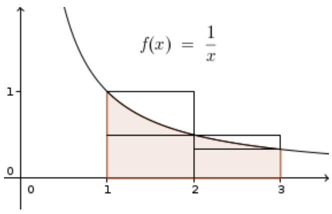


<u>Ex 13-8 :</u> ***Algorithme : sommes de Riemann***

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
p=float(input("p="))
s1=1
s2=0
n=1
while (s1-s2>p):
    n=n+1
    s1=0
    s2=0
    for i in range(0,n):
        s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
        s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
print(s1)
print(s2)
```

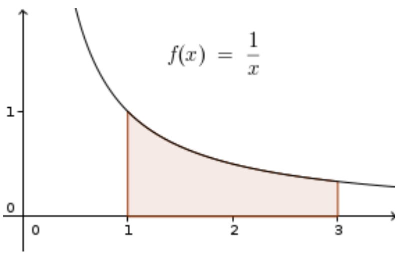
1) On choisit $p=0,1$.
Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?



À quoi correspond cette aire ?

La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme.
Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s1 et s2.

2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s1 et s2 au début de l'algorithme

4) Faire tourner le programme et déterminer ce qu'il renvoie pour p=0,01

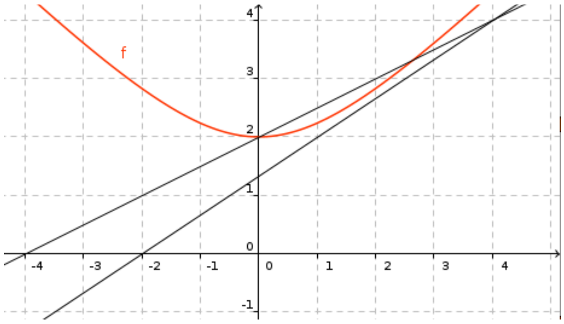
<u>Propriétés de l'intégrale</u>

<u>Ex 13-9 :</u> ***Encadrer une intégrale***

1) Démontrer que pour tout $x\in[0;1]$, on a $1\leqslant e^{x^2}\leqslant e$, puis en déduire un encadrement de $I=\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

2) Démontrer que pour tout $x\in[0;8]$, on a $1\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 3$, puis en déduire un encadrement de $J=\int_0^8 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{4+x^2}$.



En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

Ex 13-10 : ***Encadrer une intégrale - Relation de Chasles***

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x^3}$.

On pose $\mathrm{I}=\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x\in[-1;1]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$.
En déduire un encadrement de I.

3) Démontrer que :

- $\forall x\in[-1;0]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$
- $\forall x\in[0;1]$, $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$

En déduire un nouvel encadrement de I.

On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 … et obtenir des encadrements de plus en plus fin de I … l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'Ex 13-8 !

Ex 13-11 : ***Valeur moyenne***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=e^{-x}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n;n+1]$.

1) Donner l'expression de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n;n+1]$, $e^{-(n+1)}\leqslant e^{-x}\leqslant e^{-n}$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive

Ex 13-12 :

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

2) $\int_{-1}^1 x^4(x^5-1)^2\,\mathrm{d}x$

3) $\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}}\,\mathrm{d}u$

4) $\int_0^1 e^x(e^x+9)^3\,\mathrm{d}x$

Ex 13-13 : ***Décomposition en éléments simples***

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0;5]$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$

1) Démontrer que f est continue et positive sur $\mathrm{I}=[0;5]$.

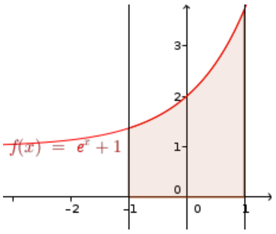
2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$.

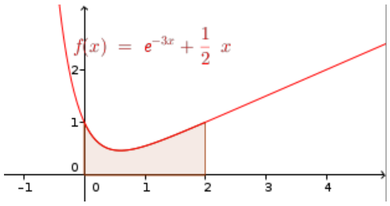
3) En déduire $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

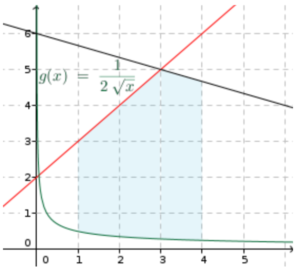
Ex 13-14 : ***Calculs d'aires***

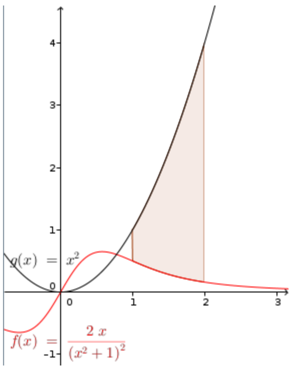
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

Remarque : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$









Ex 13-15 : ***Interprétation de Xcas***

```
g(t):=3*exp(-3*t);
f(x):=integrate(g(t),t,0,x);
f(x);
limite(f(x),x,+infinity)
```

$\left(t \to 3\cdot\exp((-3)\cdot t),\ \ x \to \int_0^x g(t)\,dt,\ \ -\exp(-3\cdot x)+1,\ \ 1 \right)$

1) Interpréter chacune des lignes ci-dessus.

2) Interpréter ce résultat graphiquement.

Ex 13-16 : $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.

Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

1) La fonction F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{F}(x)}{x}$. (On fera apparaître un taux d'accroissement)

Ex 13-17 : ***Une primitive de la fonction ln***

Soit F et G deux fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = x\ln(x) - x$.

1) Démontrer que F et G sont dérivables sur $[1;+\infty[$ et calculer leur dérivée.

2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $F(x)=G(x)+k$.

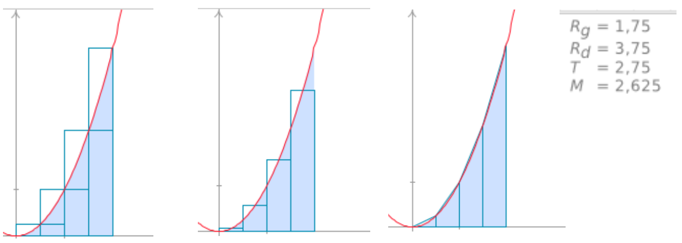
3) Calculer k .

4) Calculer $\int_1^e \ln(t)\,dt$

Ex 13-18 : *Différentes méthodes d'approximation*

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\int_1^2 x^2\,dx$.

1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente.

2) Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il applique la méthode des trapèzes (avec 10 trapèzes) à $\int_1^2 x^2\,dx$.

```
def f(x):
    return ( ……… )

def MethodeTrapeze(f, a, b, N):
    pas = ………
    x = ………
    Aire = ………
    for i in range(N):
        AireTrapeze = ………
        Aire = ………
        x = ………
    return Aire

print(MethodeTrapeze(f, 1,2,10))
```

3) Calculer $\int_1^2 x^2\,dx$ et comparer avec l'approximation obtenue.

4) a) Tester le programme **MethodeTrapeze**.py (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode des trapèzes dessinée avec 10 trapèzes.

b) Modifier le programme pour visualiser la méthode des trapèzes avec 12 trapèzes pour calculer $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\,dx$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 13-19 : *Vrai ou faux*

1) Si f est une fonction négative et si $a<b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.

2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.

3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.

4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ est fausse.

Ex 13-20 : *Propriétés de l'intégrale*

Soit a et b des nombres réels tels que $a<b$, f et g des fonctions continues sur $[a;b]$.

On pose $I=\int_a^b f(x)\,dx$ et $J=\int_a^b g(x)\,dx$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

1) $\int_b^a f(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x$

3) $c \in [a;b]$, $\int_b^c g(x)\ \mathrm{d}x$ - $\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$

4) $\int_a^b -3x + \frac{2}{3} g(x)\ \mathrm{d}x$

Ex 13-21 : ***Calculer une intégrale avec une primitive***

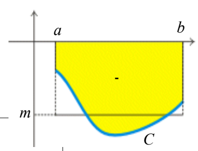
Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \mathrm{d}x$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x} \ln(x) \mathrm{d}x$

3) $\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

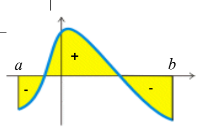
Ex 13-22 : ***Calculs d'aires***



Propriété :

Si f est **une fonction continue et négative** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

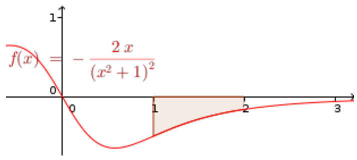
On dit parfois que $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, et négative si f est négative sur $[a;b]$

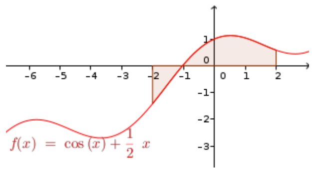


Propriété :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

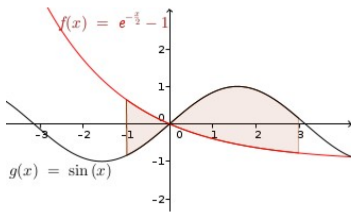


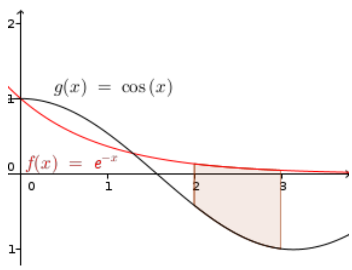


Remarques :

- Comme on le verra plus tard $(\sin x)' = \cos x$ et $\cos(x)' = -\sin x$
- Géométriquement pour les deux situations ci-dessous, on peut translater verticalement du vecteur $k\vec{j}$ (avec k suffisamment grand), les deux courbes, pour tout obtenir au-dessus de l'axe des abscisses. On pourra donc utiliser $\int_a^b f(x) - g(x) \mathrm{d}x$ pour calculer l'aire entre deux courbes quelconques avec C_f au dessus de Cg :

En effet $\int_a^b f(x) + k \mathrm{d}x - \int_a^b g(x) + k \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x) \mathrm{d}x$





Ex 13-23 : ***Décomposition en éléments simples***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{x+2}$

1) Déterminer quatre réels a , b , c et d tels que, pour tout $x\neq -2$,
$f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x+2}$

2) En déduire $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

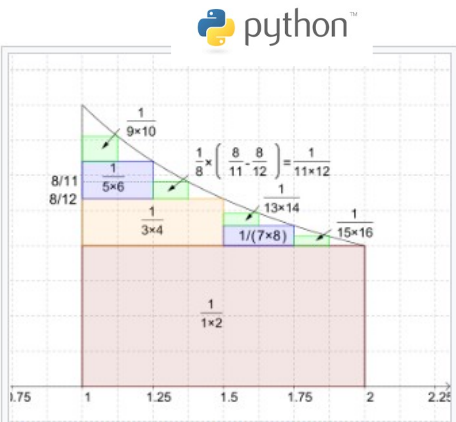
Ex 13-24 : ***Un encadrement de de ln2***

1) Démontrer que pour tout $x\geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2) a) En déduire que $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

b) Déterminer un encadrement du réel $\ln(2)$

Ex 13-25 : ***Une approximation de ln(2) - Algorithme de Brouncker***



Approximation de $\ln(2)$ par dichotomie selon la méthode de William Brouncker

En 1668, William Brouncker publie le développement en série de ln(2), résultat qu'il a établi dès 1657 en découpant l'aire sous l'hyperbole en rectangles venant boucher les trous par dichotomie :

$$\ln(2)=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)\times(2k+2)}+\ldots$$

En utilisant cette formule, compléter le programme ci-dessous écrit en Python afin d'obtenir une approximation de ln(2) pour $k=100$:

```
def Brouncker ( N ):
    Ln_2 = ……
    ……………………………………
        Ln_2 = ……………………………
    return Ln_2

print(Brouncker(100))
```

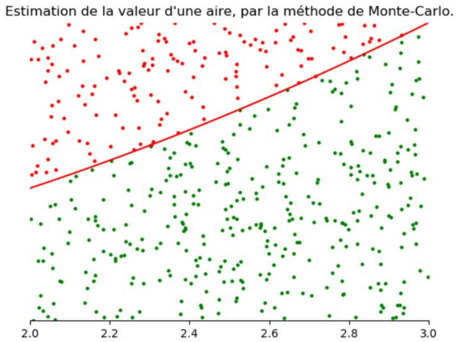
<u>Ex 13-26 :</u> ***Une approximation de ln(2) - Méthode Monte-Carlo***

Exemple pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2 \mathrm{d}\,x$

Cette méthode repose sur la loi des grands nombres.

- On définit un rectangle R de cotés [2 ;3]×[0 ; y_{max}] tel que $0 \leqslant x^2 \leqslant y_{max}$ pour tout $2 \leqslant x \leqslant 3$

- On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.



1) Déterminer y_{max}

2) Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de la fonction carrée ?

3) Que nous dit la loi des Grands Nombres ?

4) Le programme ci-dessous écrit en Python permet d'appliquer la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2 \mathrm{d}\,x$ avec $n=1000$.

```
import random

def f(x):
    return (x**2)

def MethodeMonteCarlo(f, a, b, yMax, n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        x = random.uniform(a,b)
        y = random.uniform(0,yMax)
        if (f(x) >= y):
            compteur = compteur + 1

    Aire = yMax * (b - a) * compteur / n
    return Aire
print(MethodeMonteCarlo(f, 2,3,9,1000))
```

a) Testez le programme **MethodeMonteCarlo**.py (à consulter sur les corrections de pierrelux.net :ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Monte-Carlo et vérifier qu'on obtient une bonne approximation de $\dfrac{19}{3}$.

b) Modifier quelques lignes de ce programme pour obtenir une approximation de ln(2).

<u>Ex 13-27 :</u> ***Étude d'une suite***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}\,t \;,\; \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\mathrm{d}t \;\text{ et }\; \mathrm{K}_n = \int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\mathrm{d}\,t$$

1) a) Calculer I_1 .

b) Démontrer que la suite $\left(\mathrm{I}_n\right)_{n>1}$ est croissante et majorée par 1.

Que peut-on en déduire ?

2) a) Établir que pour tout $n>0$, $\mathrm{I}_n=1-\mathrm{J}_n$.

b) Montrer que pour tout $t\in[0;1]$, $0\leqslant\frac{t^n}{1+t^n}\leqslant t^n$.

c) En déduire que pour tout $n>0$, $0\leqslant\mathrm{J}_n\leqslant\frac{1}{n+1}$

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n>0$, la fonction F_n , définie par $\mathrm{F}_n(x)=\frac{x}{n}\ln(1+x^n)$ est dérivable sur $[0;1]$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire que pour tout $n>0$, $\mathrm{J}_n=\frac{\ln(2)}{n}-\frac{1}{n}\mathrm{K}_n$.

c) Étudier les variations et le signe de la fonction F , définie par $\mathrm{F}(x)=\ln(1+x)-x$ sur $[0;1]$.

En déduire que pour tout $n>0$, $0\leqslant\mathrm{K}_n\leqslant\frac{1}{n+1}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{K}_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n(\mathrm{I}_n-1)+\ln(2))$

Ex 13-28 : ***La constante d'Euler***

Pour tout $n>0$, on pose $u_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)$.

1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Démontrer, en encadrant la fonction inverse sur l'intervalle $[k;k+1]$, que $\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}$.

En déduire que $\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

3) Établir, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, l'égalité :
$u_n=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln(k)\right)$

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
Sa limite que l'on ne cherchera pas à déterminer, est appelée la constante d'Euler.

Intégration par parties

Ex 13-29 : ***Avec une intégration par parties***

Déterminer les intégrales ci-dessous en effectuant une intégration par parties :

1) $\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$

2) $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

3) $\int_{2}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x$

4) $\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$

5) $\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln^{2} x\,\mathrm{d}x$

<u>Ex 13-30 :</u> ***Avec deux intégrations par parties***

Déterminer les intégrales ci-dessous en effectuant deux intégrations par parties successives :

1) $\int_{0}^{\pi} x^{2}\cos(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int_{-1}^{1} x^2 e^x \, dx$

Ex 13-31 : ***Avec deux intégrations par parties et en résolvant une équation***

1) Déterminer $\int_0^{\pi} \cos x \, e^x \, dx$ en effectuant deux intégrations par parties successives.

2) a) En posant $u(x)=\sin x$ et $v'(x)=\sin(x)$, expliquer le problème de cette méthode pour le calcul de $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$.

b) Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser la formule de trigonométrie : $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Essayez ...

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 13-32 : ***Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 - Ex 13-1***

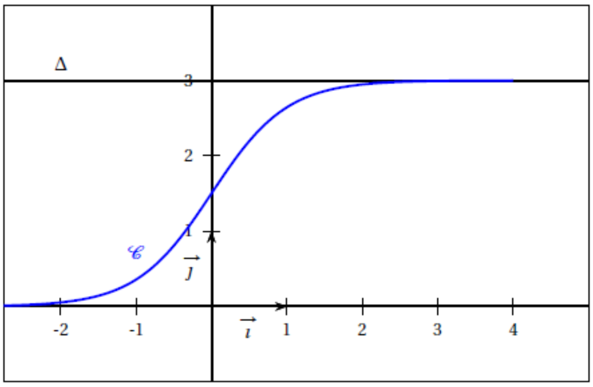
Fonction exp – corollaire du TVI – intégrales – domaine – aire

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Démontrer que $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par
   $$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

Ex 13-33 : *Baccalauréat Amérique du Nord - sujet 1 21 mai 2024 – ex 4*

Fonction exp – fonctions trigonométriques – suites d'intégrales – intégration par parties pour mettre en place une relation

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\, \mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1   from math import *
2   def seuil() :
3       n = 0
4       I = 2
5       ...
6           n = n+1
7           I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8       return n
```

Ex 13-34 : ***Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015 - ex 1***

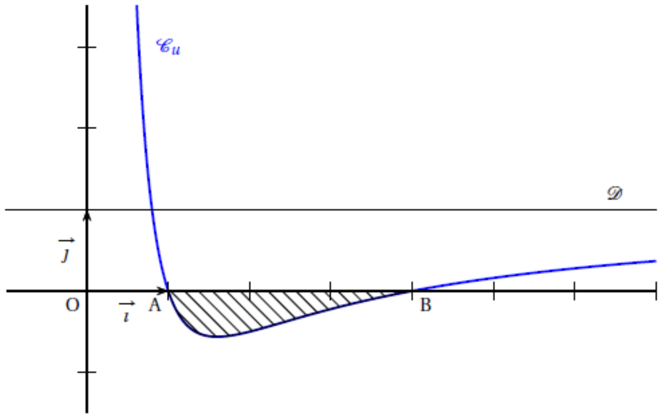
Fonction ln – domaines – aires – corollaire du TVI

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.
2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que

$$4 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant u(x).$$

   Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Ex 13-35 : ***Baccalauréat Amérique du Sud 22 novembre 2024 – ex 3***

Avec la fonction ln – intégration par parties pour mettre en place une relation – domaine – aire

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.