Définition :

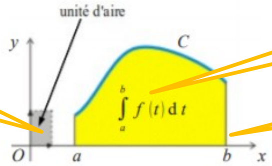
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Pour comprendre la notation, on peut imaginer que l'on fait la « somme » de a à b des rectangles de hauteur $f(t)$ et de largeur se rapprochant de zéro notée dt.

On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le réel mesurant l'aire, **en unités d'aire**, de la partie du plan (appelée **domaine**) limitée par la courbe C, l'axe $(\mathrm{O}x)$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x) \end{cases}$.

La variable t est appelée variable "muette". On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable.

Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 2 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est 6 cm²

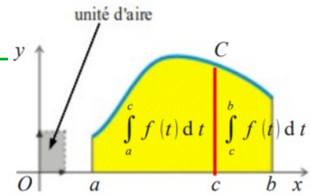


a et b sont les bornes de l'intégrale

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



Bornes inversées :

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ (en effet par extension de la relation de Chasles : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$)

Linéarité de l'intégration :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel. On a :

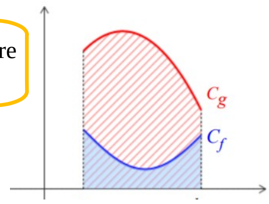
$$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Positivité et ordre :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$:

- Si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$
- Si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

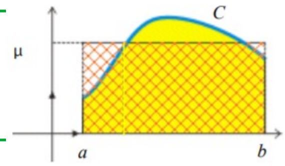
On dit qu'on intègre l'inégalité positive



Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le nombre $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.



La fonction $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

Plus précisément, F est l'unique primitive de f *sur* $[a\,;b]$ s'annulant en a.

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

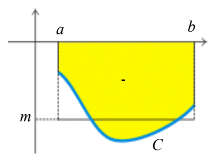
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$$ où F est une primitive de f sur I.

Pour tous réels a et b de I, la différence $[F(t)]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

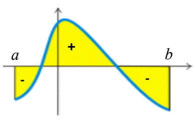
Interprétation graphique :

On dit parfois que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, et négative si f est négative sur $[a;b]$

Si f est **une fonction continue et négative** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Si f est **une fonction continue qui change de signe** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Intégration par partie :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues . Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)\,v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$