Primitives

Ex 12-1 : $y'=f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'=2$

b) $y'=e^{x}-1$

c) $y'=x^{2}$

2) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$, des fonctions f , g et h définies par :

a) $f(x)=2$

b) $g(x)=e^{x}-1$

c) $h(x)=x^{2}$

Ex 12-2 : ***Déterminer les primitives***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x+1$ sur $I=\mathbb{R}_{+}^{*}$

2) $f(x)=-\frac{5}{x^{3}}$ sur $I=\mathbb{R}_{-}^{*}$

3) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{3}e^{x}+1$ sur $I=\mathbb{R}_{+}^{*}$

Ex 12-3 : ***Déterminer une primitive vérifiant une condition***

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x)=3e^{x}+x^{2}+x^{4}$ sur $I=\mathbb{R}$ et telle que $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+e^{x}$ sur $I=\mathbb{R}_{+}^{*}$ et telle que $F(1)=0$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x+1$ sur sur $I=\mathbb{R}_{+}^{*}$ et telle que $F(1)=4$

Ex 12-4 : ***Primitives de la fonction racine carrée***

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 12-5 : ***Primitives de fonctions composées***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=x^3(x^4+1)^8$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

3) $f(x)=5e^{2x-3}$ sur $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

5) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\left(x^5-\frac{1}{6}\right)(x^6-x)^4$ sur $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^6}$ sur $I=]\sqrt{2};+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 12-6 : ***Un cas compliqué***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 12-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'-3y=0$

2) $y'+2y=0$

3) $2y'-y=0$

Ex 12-8 : ***Avec une condition initiale***

Soit l'équation différentielle (E_0) : $2y'+y=0$

1) Résoudre 1'équation (E_0) .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0)=1$.

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 12-9 : ***Découverte d'une propriété fondamentale***

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}):y'-2y=5$

1) Résoudre l'équation $(\mathrm{E}_0):y'-2y=0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(\mathrm{E}):y'-2y=5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{E}_0):y'-2y=0$, alors y_0+y_p est solution (E).

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y-y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :

Propriété :

> Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E).
Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donner dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Ex 12-10 : ***Appliquer la formule du cours***

Soit l'équation différentielle $(\text{F}) : 3y' - 2y = \ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F).

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0) = 1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Dans la suite, on pourra utiliser la propriété déjà montrée sur un exemple :

Propriété :

> Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 12-11 :

Soit l'équation différentielle $(\text{E}) : y' - y = x^2 - x - 1$

1) Résoudre l'équation différentielle $(\text{E}_0) : y' - y = 0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 1$

Ex 12-12 : ***Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée***
Fonctions trigonométriques

On considère l'équation différentielle :
$(\text{E}) : y' - 3y = \sin x$

1) Résoudre l'équation sans second membre associé : $(\text{E}_0) : y' - 3y = 0$

2) Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie par : $p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E)

3) En déduire les solutions de (E).

Ex 12-13 : ***Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée***

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y'+2y=(2x+5)\mathrm{e}^{-4x}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_0) : y'+2y=0$.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-4x}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $g(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-4x}$.

3) En appliquant la fameuse propriété , déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=0$

Ex 12-14 : ***Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée***

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : 3y'+y=(4x-3)\mathrm{e}^{\frac{-x}{3}}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_0) : 3y'+y=0$.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(ax^2+bx)\mathrm{e}^{\frac{-x}{3}}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme .
$g(x)=(ax^2+bx)\mathrm{e}^{\frac{-x}{3}}$

3) En appliquant la fameuse propriété, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=5$

EN ROUTE VERS LE BAC

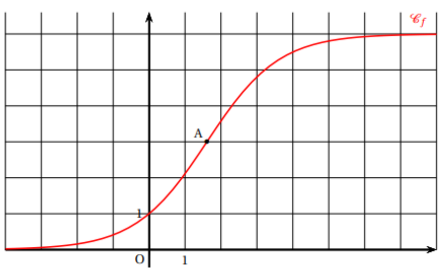
Ex 12-15 : ***Baccalauréat Métropole Antilles-Guyane 12 septembre 2024 - ex 3***

Convexité – point d'inflexion – primitive – équation différentielle

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\,;\,3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que la droite d'équation $y=6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=\frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
- pour tout réel x,

$$f''(x)=\frac{30\mathrm{e}^{-x}(5\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^3}.$$

a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,\ln 5]$, on a : $f(x)\geqslant\dfrac{5}{6}x+1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x)=k\ln(\mathrm{e}^x+5)$, où k est une constante réelle.

a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 5$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

5.b. A faire après avoir vu les intégrales

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E)\qquad y'=y-\frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

férentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y'=-y+\dfrac{1}{6}$.

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y'=-y+\dfrac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.

b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x)=\frac{6}{1+6m\mathrm{e}^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.