

Successions d'expériences**Ex 10-1 : Expériences aléatoires indépendantes ou non****Définitions et propriétés : (rappels)**

- Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{ou} \quad P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'influencent pas les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes**.

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si les deux expériences aléatoires sont indépendantes ou non.

- 1) On lance deux fois un dé non truqué.
- 2) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on met de côté, puis on tire une seconde carte.
- 3) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on remet dans le paquet, puis on tire une seconde carte.
- 4) Pour payer sa baguette de pain, une cliente sort au hasard une première pièce de son porte-monnaie puis une seconde.

Ex 10-2 : Produit cartésien

Une urne contient 6 boules blanches et deux boules vertes indiscernables au toucher . On tire successivement et au hasard trois boules avec remise.

- 1) En utilisant le produit cartésien, lister les issues possibles.
- 2) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches.

Ex 10-3 : Vrai ou faux

On effectue, dans une urne contenant dix jetons noirs et vingt jetons blancs, deux tirages successifs avec remise du jeton tiré dans l'urne.

- 1) La probabilité d'obtenir deux jetons noirs est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.
- 2) La probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égale à $\frac{2}{3} \times \frac{19}{29}$.

3) La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

4) La probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente est égale à $\frac{4}{9}$.

Ex 10-4 : Arbre pondéré et variable aléatoire

1) Dans une crèche, un jeu de construction en bois de 50 pièces comporte 20 cubes, 10 cylindres et 20 parallélépipèdes droits. Un enfant choisit au hasard une pièce du jeu puis la repose dans la baril où est rangé le jeu . Il recommence l'opération. Représenter les deux expériences à l'aide d'un arbre pondéré.

- 2) a) Sur les pièces cubes est gravé le chiffre 5, sur les cylindres le chiffre 2 et sur les pavés le chiffre 3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la somme des deux chiffres obtenus.
- b) Déterminer l'espérance de cette variable aléatoire, puis interpréter le résultat.

Ex 10-5 : Probabilités conditionnelles

On considère une urne A contenant trois boules jaunes et sept boules bleues et une urne B contenant quatre boules vertes, deux boules rouges et deux boules jaunes. Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard de manière équiprobable une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

3) Déterminer la probabilité de l'événement J : « Obtenir une boule Jaune »

4) Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

5) Combien faudrait-il ajouter de boules vertes dans l'urne B pour avoir $P(J)=0,2$?

Ex 10-6 : Simuler une succession d'épreuves indépendantes

On aimerait simuler l'expérience aléatoire consistant à tirer 10 fois de manière successive et avec remise une boule dans une urne contenant 1 boule portant le numéro 1, 4 boules portant le numéro 3 et 5 boules portant le numéro 2.

Compléter le programme ci-dessous qui permet de simuler et d'afficher 20 fois cette expérience.

```

1 from random import random
2 def simul():
3     b=[]
4     for i in range(10):
5         a=random()
6         if (a<=0.5):
7             b.append(1)
8         else:
9             if (a<=0.75):
10                b.append(3)
11            else:
12                b.append(2)
13     return(b)
14
15 for i in range(20):
16     print(simul())

```

**Épreuve de Bernoulli****Ex 10-7 : Vrai ou faux**

Les expériences suivantes correspondent-elles à des épreuves de Bernoulli.

1) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on note le résultat obtenu.

2) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on s'intéresse à la parité du résultat obtenu.

3) Pour jouer à « pile ou face », on lance deux pièces de monnaie et on note le nombre de « pile » obtenu.

4) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note la couleur de la boule obtenue.

5) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note si la couleur de la boule obtenue se retrouve dans le drapeau français.

Schéma de Bernoulli - Loi binomiale**Ex 10-8 : Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale**

Dire lesquelles des expériences 1 et 2 correspondent à des schémas de Bernoulli et lesquelles des variables aléatoires X et Y suivent une loi binomiale.

Expérience 1 :

On lance dix fois un dé à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lors d'un lancer, si le numéro qui apparaît est 1 alors c'est un succès, sinon c'est un échec.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ces séries de 10 lancers et Y la variable aléatoire telle que si le lanceur a eu plus de 7 succès il gagne 10€ sinon il perd 5€.

Expérience 2 :

On lance une pièce, on note F si face apparaît et P si pile apparaît.

- Si le résultat du lancer est F alors on tire une boule de l'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire

- Si le résultat du lancer est P alors on tire une boule de l'urne 2 contenant une boule blanche et une boule bleue.

Ex 10-9 : Définir les paramètres de la loi binomiale

Dans chacun des cas, justifier que la situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

1) À Genève en 2008, l'institut de recherche sur les allergies et l'asthme a annoncé qu'un vaccin contre l'allergie aux chats a été testé avec succès sur des souris. En effet le vaccin guérit l'allergie chez les souris dans 88% des cas. Un laboratoire a testé le vaccin sur une population de 30 souris allergiques. Chaque matin un laborantin prélève trois souris de l'échantillon pour effectuer des analyses, prélèvement que l'on considère comme étant avec remise.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de souris saines prélevées par le laborantin.

2) Alexandre joue à la roulette (numérotée de 0 à 36). Il mise 15 fois de suite sur le numéro « 24 ». On appelle X le nombre de parties remportées par Alexandre.

**Ex 10-10 : Vrai ou faux : loi binomiale – coefficients binomiaux**

Soit k et n deux entiers naturels ?

1) Dans un schéma de k épreuves de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant n succès.

2) Le coefficient $\binom{5}{4}$ n'existe pas.

$$3) \binom{4}{0} = \binom{4}{4} = \binom{7}{7} = \binom{7}{0}$$

$$4) \binom{n+1}{1} = \binom{n}{1} + 1$$

$$5) \binom{10}{7} = \binom{10}{3}$$

6) L'équation $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{k}{5}$ a pour solution 8.

Ex 10-11 : Coefficient binomiaux – sans calculatrice – triangle de Pascal

1) Calculer sans calculatrice :

$$\binom{11}{0} = \quad \binom{15}{15} =$$

$$\binom{412}{1} = \quad \binom{15}{5} - \binom{15}{10} =$$

$$\binom{85}{84} = \quad \binom{86}{80} - \binom{85}{80} - \binom{85}{79} =$$

2) À l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs des coefficients binomiaux de la forme $\binom{6}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 6.

Ex 10-12 : Utilisation de la calculatrice

1) Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,7$. Calculer à 10^{-3} près avec la calculatrice les probabilités suivantes.

$$a) P(X=20) \quad b) P(X<20)$$

$$c) P(X \leq 20) \quad d) P(X>20)$$

2) X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que

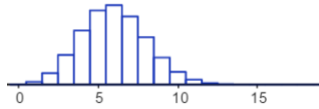
$$P(X=3) = \binom{40}{3} 0,2^3 0,8^{37}$$

Déterminer $P(X=5)$

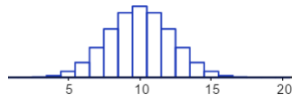
Ex 10-13 : Choisir la bonne représentation

Associer chaque représentation à la loi binomiale qu'il représente.

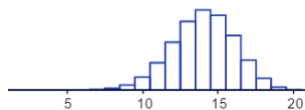
$B(20 ; 0,7)$



$B(20 ; 0,3)$

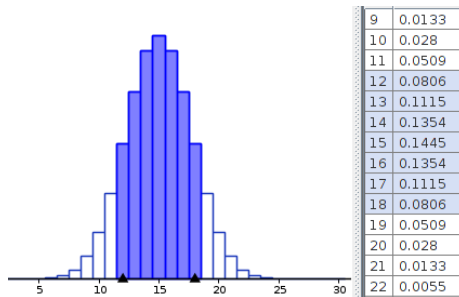


$B(20 ; 0,5)$

**Ex 10-14 : Propriété géométrique**

On considère une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,5$.

On a tracé la représentation graphique de X avec GeoGebra



1) Quelle propriété géométrique observe-t-on ?

2) Justifier cette propriété.

Problèmes : loi binomiale, espérance, écart type**Ex 10-15 : Burj Khalifa**

Burj Khalifa, gratte ciel le plus haut du monde (en 2010) situé à Dubaï, compte 57 ascenseurs. La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,006.

On considère que les pannes sont indépendantes les unes des autres. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné. X suit la loi binomiale de paramètres 57 et 0,006. Calculer et interpréter :



1) $P(X=2)$

2) $P(X \leq 2)$

3) $E(X)$

Ex 10-16 : Singe et clavier

Un singe tape 300 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le singe a tapé sur la lettre « Z ».

1) Justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X .

2) Calculer et interpréter :

a) $P(X=20)$

b) $P(X \leq 20)$

c) $E(X)$

Ex 10-17 : Composants électroniques

Un constructeur de composants électroniques produit des résistances.

On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 5×10^{-3} .

On prélève un lot de 1000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistances est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1000 résistances.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement deux résistances défectueuses »

b) « le lot contient au plus trois résistances défectueuses »

c) « le lot contient au moins quatre résistances défectueuses »

3) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X . Interpréter l'espérance dans le cadre de l'énoncé.

Ex 10-18 : Lecteurs MP3 – Gain algébrique (D'après Bac S – Polynésie juin 2009)

Après fabrication, les lecteurs MP3 d'une entreprise (dont 6 % sont défectueux) subissent quatre contrôles successifs indépendants pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros.

Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .

Aide : Utiliser la variable aléatoire Y égale au nombre de contrôles où un lecteur MP3 est rejeté.

2) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G . Donner une interprétation de ce résultat.

Ex 10-19 : Parc de centrales nucléaires

Un défenseur du nucléaire informe que le risque qu'une panne se produise dans une centrale nucléaire est de l'ordre de 10^{-4} .



La réponse de son interlocuteur est la suivante : « Mais pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est d'environ 10^{-2} ». Cette réponse est-elle correcte ?

Ex 10-20 : QCM

Un QCM est composé de 8 questions indépendantes.

Pour chaque question quatre réponses sont proposées et une seule de ces quatre réponses est juste.

Un candidat répond au hasard aux 8 questions de ce QCM.

On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer $P(N=8)$ et $P(N=4)$ à 10^{-4} près.

3) Donner la loi de probabilité de N sous forme de tableau.

4) Calculer l'espérance mathématique de N .

5) Que dire d'un QCM noté $+1$ pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

6) On fait la supposition qu'une note négative est possible.
On note le QCM de la manière suivante :

$-a$ pour une mauvaise réponse et $+b$ pour une bonne réponse
On note G la variable aléatoire correspondant à la note obtenue.
Comment doit-on noter ce QCM pour qu'un candidat qui répond au hasard ait en moyenne 0 ?

3) Déterminer cette valeur.

4) Retrouver ce résultat par le calcul.

Échantillonnage - Intervalle de fluctuation

Définition :

Soit a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

L'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ est appelé **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**.

Ex 10-21 : Jeu de grattage



Dans un jeu de grattage, un joueur a 5 % de chance de gagner.
Un joueur décide de jouer n fois de façon indépendante.

1) Déterminer la probabilité p_n de gagner au moins une fois.

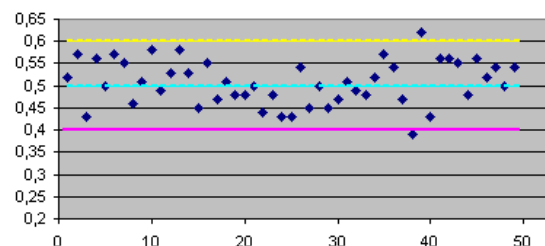


2) Écrire en python une fonction « grattage » qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,7$.

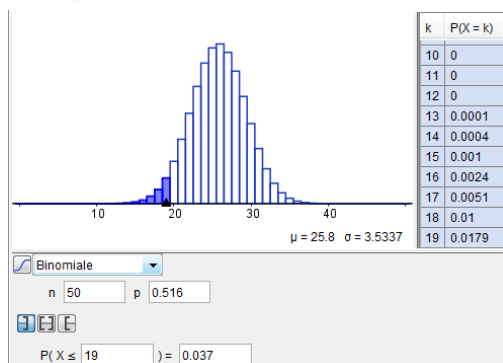


Règle de décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse :

Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$, l'hypothèse sur la valeur de la proportion p de la population est acceptable, sinon l'hypothèse est rejetée au seuil de 95 %.

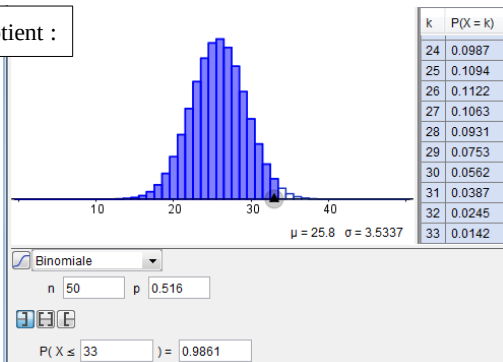


Ex 10-22 : Comparaison avec $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ vu en seconde.



On considère la loi binomiale B(50 ; 0,516).

Avec GeoGebra, on obtient :



Justifier que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est l'intervalle [0,38 ; 0,66].

Comparer avec l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ vu en seconde.

2) a) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale B(50;0,42) est l'intervalle [0,28; 0,56].

b) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale B(80;0,42) est l'intervalle [0,3125; 0,525].

c) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale B(100 ; 0,42) est l'intervalle [0,32; 0,52].

d) Que peut-on constater ?

3) Une société fabrique des boîtes en plastique de deux couleurs : des vertes et des bleues.

La fabrication est automatisée et la machine est réglée à un niveau de 42 % de boîtes vertes et 58 % de boîtes bleues, correspondant à la demande du marché.

Un test est fait sur un échantillon de 80 boîtes prélevées au hasard.

a) L'échantillon comporte autant de boîtes bleues que de boîtes vertes. La machine est-elle dérégulée au seuil de 95 % ?

b) À partir de combien de boîtes bleues et de boîtes vertes obtenues sur un échantillon de 80 boîtes doit-on penser que la machine s'est dérégulée ?

4) a) Que doit-on modifier dans l'algorithme pour avoir un test au seuil %, ce qui correspond à l'intervalle :

$$\left[\left(1 - \frac{100 - \text{seuil}}{200} \right); \frac{100 - \text{seuil}}{200} \right]$$

Ex 10-23 : Déterminer l'intervalle de fluctuation



1) Compléter l'algorithme ci-dessous permettant de trouver les entiers a et b , puis l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour une loi binomiale de paramètres n et p . (On prendra $n < 100$)

```

1 from math import factorial
2
3 def binomial( ..... ):
4     return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))*p**k*(1-p)**(n-k)
5
6 n=int(input("n="))
7 p=float(input("p="))
8 s=.....
9 a=.....
10 k=.....
11 while (.....):
12     s=.....
13     if (s>5/200 and a==0):
14         a=.....
15         k=.....
16         b=.....
17 print("l'intervalle de fluctuation à 95 % est [",a,";",b,""]

```

b) Faire tourner l'algorithme pour des seuils de 90 %, 95 % et 99 % . Que peut-on constater ?

Ex 10-24 : Intervalle de fluctuation

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,12.

1) Déterminer, en utilisant la calculatrice ou un algorithme, l'intervalle I_{100} de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de pannes pour un échantillon de 100 téléviseurs.

2) Une association de consommateurs effectue un test sur 100 personnes ayant ce modèle de téléviseur.

Dans cet échantillon, 17 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat.

Que peut-on penser de l'affirmation du constructeur ?

3) L'association pense maintenant effectuer un test sur 500 personnes. Déterminer l'intervalle I_{500} de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 500 téléviseurs. Interpréter.

EN ROUTE VERS LE BAC**Ex 10-25 : Baccalauréat Amérique du Sud 21 novembre 2024 – ex 2**

Proba conditionnelle – proba totale – loi binomiale – déterminer n – \ln – dénombrement

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.

L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

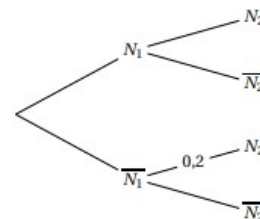
Pour tout évènement A , on note \bar{A} son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 .

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2

Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2} .

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X . Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - 0,72^n \geq 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :

On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Ex 10-26 : Baccalauréat Polynésie 19 juin 2024 – ex 3

Probabilités totale (4 partitions) – loi d’une va – loi binomiale – déterminer n – ln

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Partie B

Voici les règles d’un jeu où le but est d’obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :

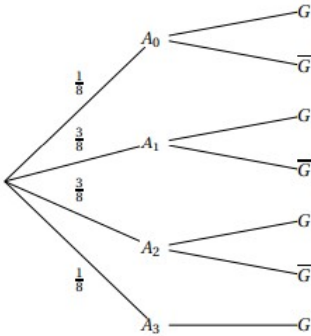
◦ Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée;

◦ Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les événements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
- Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les événements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$.
2. Recopier et compléter l’arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \frac{27}{64}$
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu’exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95?