SIMILITUDES PLANES

1) TRANSFORMATIONS DU PLAN

Définition

On dit qu'une application f du plan dans lui-même est **une transformation** si f est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire si pour tout point N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que $f(M) = N$.

Exemple :
Une translation, une homothétie, une rotation, une réflexion sont des transformations du plan.
L'application identique ou identité, notée id (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe M lui-même) est une transformation du plan.

Propriété : (admis)

- Soit f une transformation du plan. L'application du plan dans lui même qui à tout point N associe l'unique point M tel que $f(M) = N$ est aussi une transformation du plan.
  Elle est appelée transformation réciproque de f et notée f^{-1}. On a alors $f(M) = N \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$
- Soit f et f' des transformations du plan, la composée $f' \circ f$ est une transformation du plan.
  (Il en est de même pour la composée $f' \circ f$)

Exemple :
- Une translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- Une rotation de centre O et d'angle α est une transformation et sa réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.
- Une homothétie de centre O et de rapport k est une transformation et sa réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

2) GENERALITES

A) DEFINITIONS - PROPRIETE

Définition

On appelle **similitude du plan**, toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle :
pour tous points M, N, P, Q (M ≠ N et P ≠ Q) dont les images par f sont notées M', N', P', Q', on a : $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$.

Propriété

Soit f une transformation du plan .
f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, c'est-à-dire : pour tous points M et N dont les images par f sont notées M' et N', on a : $M'N' = k\,MN$

On dit que k est **le rapport de la similitude** f.

Preuve :
Soit f une similitude . Considérons deux points distincts P et Q du plan et soit P' et Q' leurs images par f. Posons $k = \frac{P'Q'}{PQ}$.
k étant le rapport de deux distances, k est un réel positif.
Comme f est une transformation, deux points distincts ont nécessairement deux images distinctes, on a donc $k \neq 0$.

- Considérons deux points distincts M et N . f étant une similitude, f conserve les rapports de distances. On a donc

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ} \Rightarrow \frac{M'N'}{MN} = \frac{P'Q'}{PQ} \Rightarrow \frac{M'N'}{MN} = k \Rightarrow M'N' = k\,MN .$$

D'autre part si M et N sont confondus, on a aussi $M'N' = k\,MN$.

- Réciproquement supposons que f est une transformation pour laquelle il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k.
Alors soit M, N, P, Q (M ≠ N et P ≠ Q) dont les images par f sont notées M', N', P', Q' . On a :

$$M'N' = k\,MN \text{ et } P'Q' = k\,PQ \Rightarrow \frac{M'N'}{MN} = k \text{ et } \frac{P'Q'}{PQ} = k \Rightarrow \frac{M'N'}{MN} = \frac{P'Q'}{PQ} \Rightarrow \frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$$

Définition

Une similitude de rapport 1, c'est-à-dire une transformation qui conserve les distances, est appelée **isométrie**.

Exemple :
- Les translations, les rotations, les symétries et leurs composées sont des isométries.
- L'identité est une isométrie.
- Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$, ce n'est pas en général une isométrie

B) RECIPROQUE - COMPOSEE

Propriété

- Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$.
- Si f est une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k', alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk'.

En général on a : $f \circ f' \neq f' \circ f$

Preuve :

- Soit f une similitude de rapport k et f^{-1} sa réciproque.

f^{-1} est la réciproque d'une transformation du plan, donc f^{-1} est une transformation du plan.
Soit M et N deux points distincts du plan. Notons $M' = f^{-1}(M)$ et $N' = f^{-1}(N)$.
Alors, par définition de f^{-1}, on sait que $f(M') = M$ et $f(N') = N$.
f étant une similitude de rapport k, on a $MN = k\,M'N'$, donc $M'N' = \frac{1}{k}MN$.

La transformation f^{-1} multiplie donc les distances par $\frac{1}{k}$. Donc f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

- Soit f une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k'.

$f \circ f'$ est la composée de deux transformations du plan, donc $f \circ f'$ est une transformation du plan.
Soit M et N deux points distincts du plan. Notons $M' = f'(M)$; $N' = f'(N)$; $M'' = f(M')$ et $N'' = f(N')$
Aux points M et N, la composée $f \circ f'$ associe M'' et N''.
f' étant une similitude de rapport k', on a $M'N' = k'\,MN$.
f étant une similitude de rapport k, on a $M''N'' = k\,M'N'$.
On en déduit $M''N'' = k\,M'N' = k\,(k'\,MN) = kk'\,MN$.
La transformation $f \circ f'$ multiplie donc les distances par kk'. Donc $f \circ f'$ est une similitude de rapport kk'.

Le résultat précédent appliqué à f' et f, montre aussi que $f' \circ f$ est une similitude de rapport $k'k = kk'$.

C) DANS LE PLAN COMPLEXE

Propriété

Une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $k = \lvert a \rvert$.

Preuve :

- Soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$
f est une transformation du plan car pour tout point N d'affixe z', il existe un et un seul point M ayant pour image N.
C'est le point d'affixe z avec $z = \frac{z'-b}{a}$.

Soit deux points distincts M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2, leurs images M_1' et M_2' ont pour affixes $z_1' = az_1 + b$ et $z_2' = az_2 + b$. On a alors :

$$z_1' - z_2' = a(z_1 - z_2) \Rightarrow \lvert z_1' - z_2' \rvert = \lvert a \rvert\,\lvert z_1 - z_2 \rvert \Rightarrow M_1'M_2' = \lvert a \rvert\, M_1M_2$$

Donc f est une transformation multipliant les distances par $k = \lvert a \rvert$. On a $k > 0$ puisque $a \in \mathbb{C}^*$. Donc f est une similitude de rapport k.

- De la même façon soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.
f est une transformation du plan car pour tout point N d'affixe z', il existe un et un seul point M ayant pour image N.

C'est le point d'affixe z avec $\overline{z} = \frac{z'-b}{a}$ c'est-à-dire $z = \overline{\left(\frac{z'-b}{a}\right)} = \frac{\overline{z'} - \overline{b}}{\overline{a}}$

Soit deux points distincts M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2, leurs images M_1' et M_2' ont pour affixes $z_1' = a\overline{z_1} + b$ et $z_2' = a\overline{z_2} + b$. On a alors :

$$z_1' - z_2' = a(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \Rightarrow \lvert z_1' - z_2' \rvert = \lvert a \rvert\,\lvert \overline{z_1} - \overline{z_2} \rvert = \lvert a \rvert\,\lvert \overline{z_1 - z_2} \rvert = \lvert a \rvert\,\lvert z_1 - z_2 \rvert \Rightarrow M_1'M_2' = \lvert a \rvert\, M_1M_2$$

Donc f est une transformation multipliant les distances par $k = \lvert a \rvert$. On a $k > 0$ puisque $a \in \mathbb{C}^*$. Donc f est une similitude de rapport k.

Remarque : Réciproquement, toute similitude a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

D) ANGLES GEOMETRIQUES – TRIANGLES SEMBLABLES

Propriété

Une similitude conserve les angles géométriques.

Preuve :
Soit f une similitude de rapport k et A, B et C trois points distincts, d'affixes z_A, z_B et z_C dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct.

- Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, alors les images A', B' et C' des points A, B et C ont pour affixes :
$z_{A'} = az_A + b$, $z_{B'} = az_B + b$ et $z_{C'} = az_C + b$. On a alors :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \arg \frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \arg \frac{az_C + b - az_A - b}{az_B + b - az_A - b} = \arg \frac{az_C - az_A}{az_B - az_A} = \arg \frac{a(z_C - z_A)}{a(z_B - z_A)} = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

f conserve donc les angles orientés et par conséquent f conserve les angles géométriques.

- Si f a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, alors les images A', B' et C' des points A, B et C ont pour affixes :
$z_{A'} = a\overline{z_A} + b$, $z_{B'} = a\overline{z_B} + b$ et $z_{C'} = a\overline{z_C} + b$. On a alors :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \arg \frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \arg \frac{a\overline{z_C} + b - a\overline{z_A} - b}{a\overline{z_B} + b - a\overline{z_A} - b} = \arg \frac{a(\overline{z_C} - \overline{z_A})}{a(\overline{z_B} - \overline{z_A})} = \arg \frac{\overline{z_C} - \overline{z_A}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}} = \arg \overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)} = -\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

f transforme un angle orienté en son opposé et f conserve les angles géométriques.

Propriété

Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable.

Preuve :
Soit ABC un triangle et soient A', B' et C' les images des points A, B et C par une similitude f de rapport k .
On a A'B' = k AB ; A'C' = k AC et B'C' = k BC
Puisque ABC est un triangle, les points A, B et C sont donc deux à deux distincts.
Les égalités précédentes montrent alors que les points A' B' et C' sont aussi deux à deux distincts. (k > 0)
Comme la similitude f conserve les angles géométriques, les trois points A', B' et C' forment un triangle dont les angles sont respectivement égaux aux angles du triangle ABC. Donc A'B'C' est un triangle semblable au triangle ABC.

E) 2 OU 3 POINTS INVARIANTS

Propriété

Soit A, B et C trois points non alignés.
Si f est une similitude telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$, alors f est l'application identique.

Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'application identique

Preuve :
Soit A, B et C trois points non alignés et f une similitude telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$.
Le rapport de la similitude f est $k = \dfrac{f(A)f(B)}{AB} = \dfrac{AB}{AB} = 1$. Donc f est une isométrie.
Soit M un point du plan et soit $M' = f(M)$.
Supposons que $M' \neq M$
Comme f est un isométrie on a $f(A)f(M) = AM$. Sachant que $f(A) = A$ et $f(M) = M'$, on obtient $AM' = AM$.
Par conséquent A se trouve sur la médiatrice de [MM'].
On démontrerait de même que B et C sont sur la médiatrice de [MM'].
On a alors une contradiction puisque les points A, B et C non alignés seraient tous les trois sur la médiatrice de [MM'].
On ne peut donc pas supposer que $M' \neq M$.
Pour tout point M du plan on a donc $M' = M$ c'est-à-dire $f(M) = M$. Par conséquent f est l'application identique.

Propriété

Soit A et B deux points distincts.
Si f est une similitude telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$, alors f est l'application identique ou f est la symétrie axiale d'axe (AB).

Preuve :
Soit A et B deux points distincts et f est une similitude telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$.
On a $f(A)f(B) = AB$, on peut en déduire que le rapport de la similitude f est 1. Donc f est une isométrie.
Considérons un point M n'appartenant à la droite (AB) et $M' = f(M)$.

- Si $M' = M$, alors f admet trois points fixes non alignés, donc f est l'identité.
- Si $M' \neq M$, alors comme f est une isométrie, on a $f(A)f(M) = AM$ donc $AM' = AM$. De même $BM' = BM$.
  On en déduit que A et B sont sur la médiatrice de [MM'], donc (AB) est la médiatrice de [MM'].
  Considérons s la symétrie axiale d'axe (AB). On a $s \circ f(A) = s(A) = A$ et $s \circ f(B) = s(B) = B$
  De plus $s \circ f(M) = s(M')$ et $s(M') = M$ puisque (AB) est la médiatrice de [MM'].
  Ainsi $s \circ f$ est une similitude admettant trois points fixes non alignés, donc $s \circ f = \text{id}$.
  On a alors : $s \circ s \circ f = s \Leftrightarrow \text{id} \circ f = s \Leftrightarrow f = s$.
  f est donc la symétrie axiale d'axe (AB).

3) SIMILITUDES DIRECTES

A) DEFINITION ET ECRITURE COMPLEXE

Définition

On appelle **similitude directe** toute similitude conservant les angles orientés.

La propriété suivante découle de ce qu'on a vu précédemment.

Propriété

Une application du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme
$z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Le rapport de la similitude est alors $k = |a|$.

Exemples :

L'identité, les translations, les rotations, les homothéties sont des similitudes directes.
Les symétries axiales sont des similitudes non directes (**similitudes inverses**).

B) ANGLE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Propriété

Soit f une similitude directe. Il existe un réel θ tel que, pour tous points distincts M et N du plan, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta \ [2\pi]$.
Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, alors $\theta = \arg(a) \ [2\pi]$.

On dit que θ est **l'angle** de la similitude directe.

Preuve :

Soit f une similitude directe . f a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.
Soit M et N deux points distincts du plan d'affixes respectives z_1 et z_2.

Leurs images f(M) et f(N) ont pour affixes $z'_1 = az_1 + b$ et $z'_2 = az_2 + b$. On sait alors que :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \arg \frac{z'_2 - z'_1}{z_2 - z_1} = \arg \frac{az_2 + b - az_1 - b}{z_2 - z_1} = \arg \frac{az_2 - az_1}{z_2 - z_1} = \arg(a) \quad [2\pi]$$

En posant $\theta = \arg(a)$, on obtient $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta \quad [2\pi]$.

Remarques :

- Les translations et les homothéties de rapport positif ont pour angle $\theta = 0 \ [2\pi]$.
- Les homothéties de rapport négatif ont pour angle $\theta = \pi \ [2\pi]$.
- Une rotation d'angle θ a pour angle $\theta \ [2\pi]$.

Propriété

- Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors f^{-1} est une similitude directe de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
- Si f et f' sont deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ', alors la composée $f' \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$. (Il en est de même pour la composée $f \circ f'$)

Preuve :

- Soit f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ . f a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$, $b \in \mathbb{C}$.

On peut alors écrire $z = \frac{1}{a} z' - \frac{b}{a} = \frac{1}{ke^{i\theta}} z' - \frac{b}{a} = \frac{1}{k} e^{-i\theta} z' - \frac{b}{a}$

Donc f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

- Soit f et f' deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ'.

f et f' ont pour écritures complexes respectives : $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$, $b \in \mathbb{C}$ et $z' = a'z + b'$ avec $a' = k'e^{i\theta'}$, $b' \in \mathbb{C}$.
Alors l'image du point M d'affixe z par la composée $f' \circ f$ est le point M" d'affixe :

$$z'' = a'z' + b' = a'(az + b) + b' = a'a\,z + a'b + b' = (ke^{i\theta})(k'e^{i\theta'})\,z + a'b + b' = kk'e^{i(\theta + \theta')}\,z + a'b + b'$$

Donc $f' \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

Remarque : La conservation des angles orientés par une similitude directe et la transformation d'une angle orienté en son opposé par une similitude non directe (similitude inverse), font que :

- La composée d'une similitude directe et d'une similitude inverse est une similitude inverse.
- La composée de deux similitudes inverses est une similitude directe.

C) CENTRE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Propriété

Une similitude directe qui n'est pas une translation a un point invariant (point fixe) unique. Ce point est appelé **centre** de la similitude

Preuve :

Soit f une similitude directe . f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, alors $z' = z + b$, donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe b.
  Si $b \neq 0$, f n'a pas de point invariant.
  Si $b = 0$, $f = \text{id}$ donc tous les points sont invariants par f.
- Si $a \neq 1$, alors un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si : $z = az + b \iff z(1 - a) = b \iff z = \frac{b}{1 - a}$

  Donc f a un point invariant unique d'affixe $\frac{b}{1 - a}$.

Remarque :
Une similitude directe ayant au moins deux points invariants est nécessairement l'application identique.

D) FORME REDUITE

Propriété

Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation Ω l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f.
f est la composée de l'homothétie $h(\Omega;k)$ de centre Ω et de rapport k et de la rotation $r(\Omega;\theta)$ de centre Ω et d'angle θ.
Ces deux applications commutent, on peut écrire $f = h(\Omega;k) \circ r(\Omega;\theta) = r(\Omega;\theta) \circ h(\Omega;k)$.

Cette décomposition est appelée **forme réduite** de la similitude directe f.

Preuve :

Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation . On sait que f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.
On a vu que le rapport de f est $k = |a|$ et que l'angle de f est $\theta = \arg(a) \quad [2\pi]$.
On sait que f a un point invariant unique. Notons le Ω .
Alors pour tout point M d'affixe z, le point M' = f(M) a pour affixe $z' = az + b$.
Ω étant invariant par f, en notant ω son affixe, on peut écrire $\omega = a\omega + b$. On a alors :

$$z' - \omega = az + b - a\omega - b \iff z' - \omega = a(z - \omega) \iff z' - \omega = k\,e^{i\theta}(z - \omega)$$

L'écriture complexe de f peut donc s'écrire sous la forme : $z' - \omega = k\,e^{i\theta}(z - \omega)$.
On sait que l'homothétie $h(\Omega;k)$ de centre Ω et de rapport k a pour écriture complexe $z' - \omega = k\,(z - \omega)$.

On sait que la rotation $r(\Omega;\,\theta)$ de centre Ω et d'angle θ a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
Alors la composée $h(\Omega;k) \circ r(\Omega;\,\theta)$ a pour écriture complexe $z' - \omega = k\,e^{i\theta}(z - \omega)$.
De même la composée $r(\Omega;\,\theta) \circ h(\Omega;k)$ a aussi pour écriture complexe $z' - \omega = k\,e^{i\theta}(z - \omega)$.

Définition

Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω , son rapport k et son angle θ.
On dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
On note : $f = S(\Omega\,;\,k\,;\,\theta)$ (k est un réel strictement positif et θ un réel).

Cas particuliers :

- Si $k = 1$, la similitude f est une rotation. $f = S(\Omega\,;\,1\,;\,\theta) = r(\Omega;\,\theta)$.
- Si $\theta = 0\ [2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport k. $f = S(\Omega\,;\,k\,;\,0) = h(\Omega;k)$.
- Si $\theta = \pi\ [2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport $-k$. $f = S(\Omega\,;\,k\,;\,\pi) = h(\Omega;-k)$.

E) DONNEE D'UNE SIMILITUDE PAR DEUX POINTS ET LEURS IMAGES

Propriété

Soit A, B, A', B' quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B' .
Il existe une unique similitude directe f transformant A en A' et B en B'.

Preuve :

Soit A, B, A', B' quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B' et $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ leurs affixes respectives.

Rechercher une similitude directe transformant A en A' et B en B' revient à rechercher deux nombres complexes a et b, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} - z_{A'} = az_B + b - az_A - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - az_A \\ a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - \left(\dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) z_A \\ a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \end{cases}$$

On a supposé A ≠ B et A' ≠ B' . On a donc trouvé un unique couple $(a\,;\,b)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tel que $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$

Il existe donc une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Remarque :
Lorsqu'un triangle A'B'C' est l'image par une similitude directe d'un triangle ABC, on dit que ABC et A'B'C' sont **directement semblables**.

F) DEPLACEMENTS

Définition

Une similitude directe de rapport 1 est appelé **un déplacement**.

Un déplacement est une isométrie.

Remarques :

- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.

Propriété

- Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.
- La composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 0\ [2\pi]$ est une rotation d'angle θ.
- La composée de deux rotations d'angles respectifs θ et θ' est :
  une translation si $\theta + \theta' = 0\ [2\pi]$,
  une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$.

Preuve :

- Supposons que f n'est pas une translation . Alors f est une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ : $f = S(\Omega\,;\,k\,;\,\theta)$.
  Comme f est un déplacement, on a $k = 1$.
  Donc $f = S(\Omega\,;\,1\,;\,\theta) = r(\Omega;\,\theta)$. Un déplacement est donc, soit une translation, soit une rotation.

- Soit t une translation et r une rotation d'angle $\theta \neq 0\ [2\pi]$. t et r sont des déplacements.
  Leur composée est donc un déplacement (similitude directe de rapport 1).
  Donc $r \circ t$ est un déplacement, c'est-à-dire une similitude directe de rapport 1.
  L'angle de cette similitude directe est la somme des angles des similitudes directes t et r.
  Donc $r \circ t$ est une similitude directe d'angle $\theta \neq 0\ [2\pi]$ et de rapport 1, c'est-à-dire que $r \circ t$ une rotation d'angle θ.

  On pourrait faire un raisonnement identique avec $t \circ r$.

- Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs θ et θ'. r et r' sont des similitudes directes de rapport 1 et d'angles respectifs θ et θ'.
  Donc $r \circ r'$ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\theta + \theta'$.
  $r \circ r'$ est un déplacement, donc $r \circ r'$ est une translation ou une rotation.
  Si $\theta + \theta' = 0\ [2\pi]$, alors $r \circ r'$ est une translation. (Une rotation d'angle nul est l'application identique, donc c'est la translation de vecteur nul)
  Si $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$, alors $r \circ r'$ ne peut pas être une translation, donc $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

G) DECOMPOSITION D'UNE SIMILITUDE INVERSE

Propriété

Soit f une similitude inverse.
On peut écrire f sous la forme $f = g \circ s$, où s est une symétrie axiale et g une similitude directe.
On peut écrire f sous la forme $f = s' \circ g'$, où s' est une symétrie axiale et g' une similitude directe.

Preuve :

Soit f une similitude inverse.

- Considérons une symétrie axiale s et posons $g = f \circ s$. Alors f et s étant des similitudes inverses, $g = f \circ s$ est une similitude directe.

En composant g avec s, on obtient $g \circ s = f \circ s \circ s$
s étant une symétrie axiale, on sait que $s \circ s = \mathrm{id}$, on en déduit alors $g \circ s = f \circ \mathrm{id} = f$.
On a donc $f = g \circ s$, où s est une symétrie axiale et g une similitude directe.

- De la même façon, en considérant une symétrie axiale s' on peut poser $g' = s' \circ f$.

Alors f et s' étant des similitudes inverses, $g' = s' \circ f$ est une similitude directe.
En composant s' avec g', on obtient $s' \circ g' = s' \circ s' \circ f$.
s' étant une symétrie axiale, on sait que $s' \circ s' = \mathrm{id}$, on en déduit alors $s' \circ g' = \mathrm{id} \circ f = f$.
On a donc $f = s' \circ g'$, où s' est une symétrie axiale et g' une similitude directe.

4) PROPRIETES GEOMETRIQUES DES SIMILITUDES PLANES

Propriété

Soit f une similitude plane.

- f conserve les rapports de distances.
- f conserve les angles géométriques.
- f conserve l'alignement.
- f transforme une droite en une droite.
- f transforme un segment en un segment.
- f conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
- f conserve le barycentre.
- f conserve le milieu.
- f transforme un triangle en un triangle semblable.
  (Si f est une similitude directe, les triangles sont directement semblables . Si f est une similitude inverse, les triangles sont inversement semblables)
- f transforme un cercle en un cercle,
  l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR (où k est le rapport de la similitude f).

Preuve :

- <u>f conserve le barycentre :</u>

  soit G le barycentre de $(M_1 ; \alpha_1) ; (M_2 ; \alpha_2) ; \dots (M_n ; \alpha_n)$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0)$,

  En notant $z_1, z_2, \dots , z_n$ les afiixes de M_1, M_2, M_n, on sait que $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$.

  Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$,alors :

$$z_{G'} = az_G + b = a\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} + b = \frac{\alpha_1 az_1 + \alpha_2 az_2 + \dots + \alpha_n az_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} + \frac{b\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = = \frac{\alpha_1 z'_1 + \alpha_2 z'_2 + \dots + \alpha_n z'_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

  On en déduit que G' est le barycentre de $(M'_1 ; \alpha_1) ; (M'_2 ; \alpha_2) ; \dots (M'_n ; \alpha_n)$.

  Si f a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$, alors :

$$z_{G'} = a\overline{z_G} + b = a\overline{\left(\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}\right)} + b = a\left(\frac{\alpha_1 \overline{z_1} + \alpha_2 \overline{z_2} + \dots + \alpha_n \overline{z_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}\right) + b$$

$$z_{G'} = \frac{\alpha_1 a\overline{z_1} + \alpha_2 a\overline{z_2} + \dots + \alpha_n a\overline{z_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} + \frac{b\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \frac{\alpha_1(a\overline{z_1} + b) + \alpha_2(a\overline{z_2} + b) + \dots + \alpha_n(a\overline{z_n} + b)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \frac{\alpha_1 z'_1 + \alpha_2 z'_2 + \dots + \alpha_n z'_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

  On en déduit que G' est le barycentre de $(M'_1 ; \alpha_1) ; (M'_2 ; \alpha_2) ; \dots (M'_n ; \alpha_n)$.