SECTIONS PLANES DE SURFACES

Dans tout le cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) CYLINDRE ILLIMITE D'AXE (Oz)

Définition

Soit C un cercle de centre O et de rayon R . du plan (xOy).
Le **cylindre illimité** d'axe (Oz) et de **rayon** R est la surface constituée des droites parallèles à (Oz) et passant par un point de C .
Chacune de ces droites est une **génératrice** du cylindre.

Propriété

Le cylindre illimité d'axe (Oz) et de rayon R a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$.

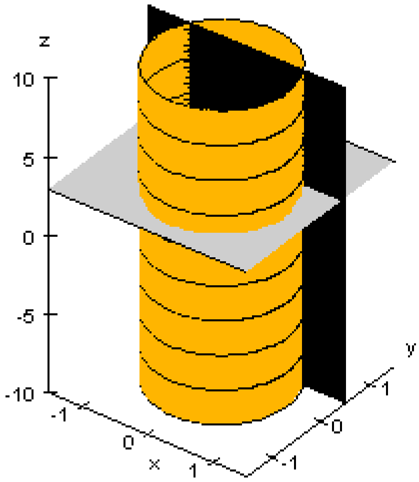
Preuve :

Soit C le cercle de centre O et de rayon R du plan (xOy).
Un point M (x ; y ; z) appartient au cylindre illimité d'axe (Oz) et de rayon R si, et seulement si, son projeté orthogonal H sur (xOy) appartient au cercle C, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = R^2$.

Propriété

Soit un cylindre illimité d'axe (Oz) et de rayon R.

- Sa section avec le plan P d'équation $z = k$ (parallèle à (xOy)) est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ (dans le plan P)
- Sa section avec le plan Q d'équation $y = k$ (parallèle à (xOz)) est :
  - si $|k| > R$: l'ensemble vide
  - si $|k| = R$: la droite d'équation $x = 0$ (dans le plan Q)
  - si $|k| < R$: les droites d'équations $x = \sqrt{R^2 - k^2}$ et $x = -\sqrt{R^2 - k^2}$ (dans le plan Q)
- Sa section avec le plan H d'équation $x = k$ (parallèle à (yOz) est :
  - si $|k| > R$: l'ensemble vide
  - si $|k| = R$: la droite d'équation $y = 0$ (dans le plan H)
  - si $|k| < R$: les droites d'équations $y = \sqrt{R^2 - k^2}$ et $y = -\sqrt{R^2 - k^2}$ (dans le plan H)



Preuve :

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du cylindre avec le plan P d'équation $z = k$ si, et seulement si, $x^2 + y^2 = R^2$ et $z = k$.
  Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) . H a pour coordonnées (0 ; 0 ; k) .
  L'équation dans le plan P rapporté au repère $(H; \vec{i}, \vec{j})$ est alors $x^2 + y^2 = R^2$, c'est l'équation du cercle de centre H et de rayon R.

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du cylindre avec le plan Q d'équation $y = k$ si, et seulement si :
  $$x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } y = k \Leftrightarrow x^2 + k^2 = R^2 \text{ et } y = k \Leftrightarrow x^2 = R^2 - k^2 \text{ et } y = k$$
  - si $|k| > R$, $R^2 - k^2 < 0$. L'équation $x^2 = R^2 - k^2$ n'a pas de solution .
    On en déduit que l'intersection est vide.
  - si $|k| = R$, $R^2 - k^2 = 0$. On a alors :
    $$x^2 = R^2 - k^2 \Leftrightarrow x = 0$$
    On en déduit que l'intersection est la droite d'équation $x = 0$ (dans le plan Q)
  - si $|k| < R$, $R^2 - k^2 > 0$. On a alors :
    $$x^2 = R^2 - k^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{R^2 - k^2} \text{ ou } x = -\sqrt{R^2 - k^2}$$
    On en déduit que l'intersection est la réunion des droites d'équations $x = \sqrt{R^2 - k^2}$ et $x = -\sqrt{R^2 - k^2}$ (dans le plan Q)

- La démonstration est analogue, pour la section avec le plan H d'équation $x = k$

2) CONE ILLIMITE D'AXE (Oz)

Définition

Soit I un point de l'axe (Oz) et C le cercle de centre I dans un plan parallèle à (xOy).
Le **cône illimité** d'axe (Oz) , de **sommet** O et de **directrice** C est la surface constituée des droites passant par O et un point de C .
Chacune de ces droites est une **génératrice** du cône.

Propriété

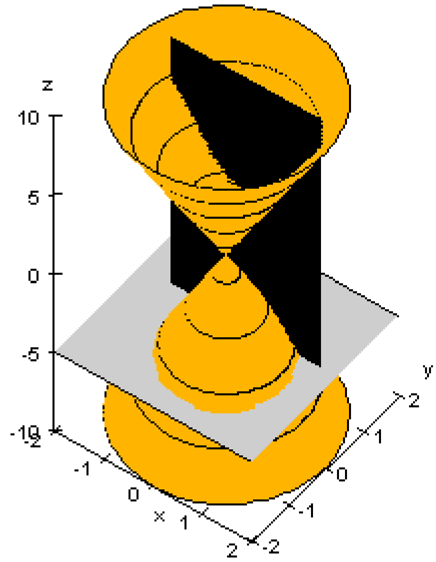
Un cône illimité de centre O et d'axe (Oz) a une équation cratésienne de la forme $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ ($a \neq 0$)

Preuve :

Le cercle C de centre I (0 ; 0 ; h) et de rayon R est une directrice du cône illimité.
Soit M (x ; y ; z) un point du cône illimité distinct de O et P (0 ; 0 ; z) le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) .
On note A le point d'intersection de C et de la droite (OM).
M appartient au cône illimité si, et seulement si, les triangles OMP et OAI sont semblables, c'est-à-dire :
$$\frac{MP}{AI} = \frac{OP}{OI} \Leftrightarrow MP = R \times \frac{|z|}{|h|} \Leftrightarrow MP^2 = R^2 \frac{z^2}{h^2} \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = R^2 \frac{z^2}{h^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 z^2 \text{ (avec } |a| = \frac{R}{h} \text{)}$$

Remarque :

La mesure θ de l'angle $\widehat{IOA}$ est indépendante de la génératrice (OM) . On dit que θ est **le demi-angle au sommet** du cône illimité.
Si on appelle θ l'angle que fait la droite avec (Oz), on montre facilement que : $|a| = \tan\theta$.



Propriété

Soit un cône illimité de centre O et d'axe (Oz) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ $(a \neq 0)$.

- Sa section avec le plan P d'équation $z = k$ (parallèle à (xOy)) est le cercle d'équation
  $x^2 + y^2 = a^2k^2$ (dans le plan P)
- Sa section avec le plan Q d'équation $y = k$ (parallèle à (xOz)) est :
  - si $k = 0$: les droites d'équations $x = az$ et $x = -az$ (dans le plan Q)
  - si $k \neq 0$: Une hyperbole dont l'équation peut s'écrire
    XZ = K (dans un repère du plan Q)
- Sa section avec le plan H d'équation $x = k$ (parallèle à (yOz)) est :
  - si $k = 0$: les droites d'équations $y = az$ et $y = -az$ (dans le plan H)
  - si $k \neq 0$: Une hyperbole dont l'équation peut s'écrire
    YZ = K (dans un repère du plan H)

Preuve :

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du cône illimité avec le plan P d'équation $z = k$ si, et seulement si, $x^2 + y^2 = a^2k^2$ et $z = k$

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) . H a pour coordonnées (0 ; 0 ; k) .
L'équation dans le plan P rapporté au repère $(H; \vec{i}, \vec{j})$ est alors $x^2 + y^2 = a^2k^2$, c'est l'équation du cercle de centre H et de rayon $|ak|$.

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du cône illimité avec le plan Q d'équation $y = k$ si, et seulement si :

$$x^2 + y^2 = a^2z^2 \text{ et } y = k \Leftrightarrow x^2 + k^2 = a^2z^2 \text{ et } y = k \Leftrightarrow x^2 = a^2z^2 - k^2 \text{ et } y = k$$

  - si $k = 0$, on a alors :

$$x^2 = a^2z^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = az \text{ ou } x = -az$$

    On en déduit que l'intersection est la réunion des deux droites d'équations $x = az$ et $x = -az$ (dans le plan Q)
  - si $k \neq 0$, on a alors :

$$x^2 + k^2 = a^2z^2 \Leftrightarrow a^2z^2 - x^2 = k^2 \Leftrightarrow (az - x)(az + x) = k^2$$

Considérons les vecteurs $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2a}\vec{k}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2a}\vec{k}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan Q, donc $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de Q.
Si un point M a pour coordonnées (x ; z) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$ et (X ; Z) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a :

$$\mathrm{X}\,\vec{u} + \mathrm{Z}\,\vec{v} = x\,\vec{i} + z\,\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{X}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2a}\vec{k}\right) + \mathrm{Z}\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2a}\vec{k}\right) = x\,\vec{i} + z\,\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{Z}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2a}\mathrm{X} + \frac{1}{2a}\mathrm{Z}\right)\vec{k} = x\,\vec{i} + z\,\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{Z} \text{ et } z = \frac{1}{2a}\mathrm{X} + \frac{1}{2a}\mathrm{Z}$$

L'équation $(az - x)(az + x) = k^2$ devient alors :

$$\left[a\left(\frac{1}{2a}\mathrm{X} + \frac{1}{2a}\mathrm{Z}\right) - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{Z}\right)\right]\left[a\left(\frac{1}{2a}\mathrm{X} + \frac{1}{2a}\mathrm{Z}\right) + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{Z}\right)\right] = k^2 \Leftrightarrow \mathrm{XZ} = \mathrm{K} \quad (\text{en posant } \mathrm{K} = \mathrm{k}^2)$$

L'intersection est donc l'hyperbole d'équation XZ = K

- La démonstration est analogue, pour la section avec le plan H d'équation $x = k$

Remarques :

- Les droites d'intersection avec le plan d'équation $y = 0$ ont pour équations paramétriques respectives $\begin{cases} x = at \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -at \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.
- Les droites d'intersection avec le plan d'équation $x = 0$ ont pour équations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 0 \\ y = at \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = -at \\ z = t \end{cases}$.
- Ce sont des génératrices du cône illimité.

3) SURFACES D'EQUATION $z = f(x\,;y)$

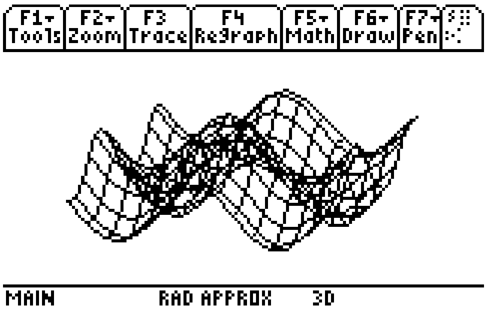
A) DEFINITIONS ET EXEMPLES

Les fonctions qui ont été étudiées jusqu'ici sont des fonctions définies sur IR (ou sur une partie de IR) à valeurs dans IR . Elles ne dépendent que d'une seule variable et permettent d'étudier un grand nombre de problèmes.
Cependant certaines situations mettent en jeu plusieurs variables : l'aire d'un rectangle, le volume d'un cône ...
On est donc amené à définir des fonctions à plusieurs variables.

Définitions :

Soit x un réel d'un intervalle I et y un réel d'un intervalle J.
Définir **une <u>fonction f des deux variables</u> x et y**, c'est associer à chaque couple (x ; y), avec $x \in$ I et $y \in$ J, un réel et un seul noté $f(x\,;y)$
<u>La représentation graphique</u> de f est l'ensemble S des points M (x ; y ; z) de l'espace tels que $z = f(x\,;y)$, où $x \in$ I et $y \in$ J .
On dit que $z = f(x\,;y)$ est une équation de **<u>la surface</u>** S dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
la courbe d'intersection d'une surface S avec le plan horizontal d'équation $z = k$ est appelée **<u>courbe de niveau k</u>**. (on dit aussi **<u>ligne de niveau</u>** k)

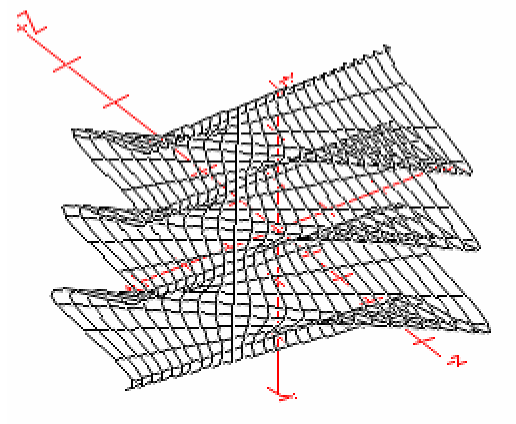
On peut utiliser des outils de représentation graphique en trois dimensions pour visualiser de telles surfaces.



<u>Exemple 1 :</u>

On considère la surface S d'équation $z = 5\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2}\right)$

Sa représentation graphique a été tracée ci-contre en utilisant une calculatrice TI 89, en choisissant le mode 3D et en donnant l'équation $z_1 = 5\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2}\right)$



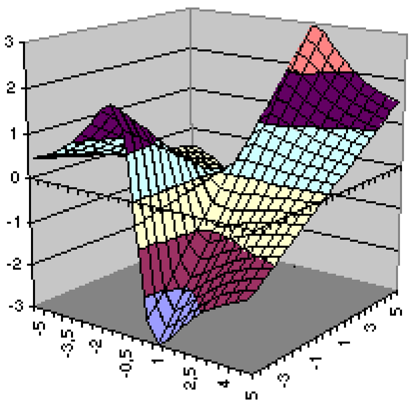
<u>Exemple 2 :</u>

On considère la surface S d'équation $z = -x\cos^2 y + \sin^2 y$
Sa représentation graphique a été tracée ci-contre en utilisant le logiciel gratuit Graphcalc.
Ce logiciel est téléchargeable à l'adresse suivante : http://www.graphcalc.com/
Pour tracer cette surface, il faut choisir l'onglet 3D graph, puis cliquer sur le bouton droit de la souris …

<u>Exemple 3 :</u>

On considère la surface S d'équation $z = \dfrac{xy}{x^2+1} + \dfrac{y}{10}$

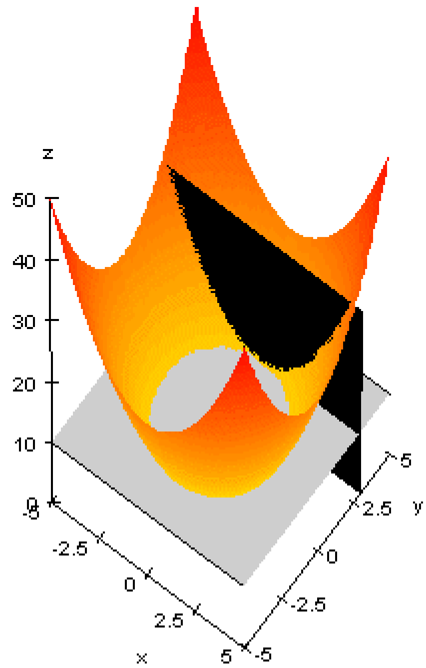
Sa représentation graphique a été tracée ci-contre en utilisant un tableur :



	A	B	C	
1		-5	-4,5	
2	-5	0,46153846	0,55882353	0,6
3	-4,5	0,41538462	0,50294118	0,6
4	-4	0,36923077	0,44705882	0,5
5	-3,5	0,32307692	0,39117647	0,4

La 1ère ligne correspond aux valeurs de x prises entre -5 et 5
La 1ère colonne correspond aux valeurs de y prises entre -5 et 5
On a écrit dans la cellule B2 la formule :   =B$1*$A2/(B$1^2+1)+$A2/10
Cette formule a été recopiée sur la plage B2:V22
Le graphique est de type "Surface"

<u>B) PARABOLOÏDE</u>



<u>Définition</u>

La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ est **<u>un paraboloïde de révolution</u>** .

<u>Propriété</u>

Soit un paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$.

- Sa section avec le plan P d'équation $z = k$ est :
  - si $k < 0$: ensemble vide
  - si $k = 0$: le point O
  - si $k > 0$: le cercle d'équation $x^2 + y^2 = k$ (dans le plan P)
- Sa section avec le plan Q d'équation $y = k$ est la parabole d'équation $z = x^2 + k^2$ (dans le plan Q)
- Sa section avec le plan H d'équation $x = k$ est la parabole d'équation $z = y^2 + k^2$ (dans le plan H)

Preuve :

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$ avec le plan P d'équation $z = k$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases}$$

  - si $k < 0$, l'équation $x^2 + y^2 = k$ n'a pas de solution. On en déduit que l'intersection est vide.
  - si $k = 0$, l'équation $x^2 + y^2 = k$ a pour solution (0 ; 0). On en déduit que l'intersection est le point O.
  - si $k > 0$, l'équation $x^2 + y^2 = k$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$ (dans le plan P)

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$ avec le plan Q d'équation $y = k$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases}$$

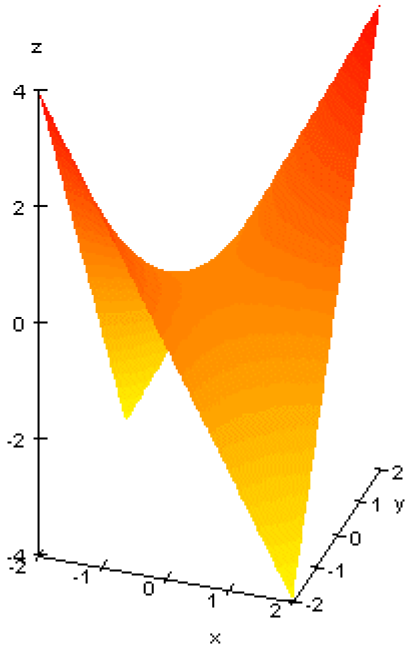
  La section est donc la parabole d'équation $z = x^2 + k^2$ (dans le plan Q)

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$ avec le plan H d'équation $x = k$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y^2 + k^2 \\ x = k \end{cases}$$

  La section est donc la parabole d'équation $z = y^2 + k^2$ (dans le plan H)

C) PARABOLOÎDE HYPERBOLIQUE



Définition

La surface d'équation $z = xy$ est **un paraboloïde hyperbolique**. On dit aussi « **selle de cheval** »

Propriété

Soit un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$.

- Sa section avec le plan P d'équation $z = k$ est :
  - si $k = 0$: les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ (dans le plan P)
  - si $k \neq 0$: l'hyperbole d'équation $xy = k$ (dans le plan P)
- Sa section avec le plan Q d'équation $y = k$ est la droite d'équation $z = kx$ (dans le plan Q)
- Sa section avec le plan H d'équation $x = k$ est la droite d'équation $z = ky$ (dans le plan H)

Preuve :

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ avec le plan P d'équation $z = k$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} z = xy \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = k \\ z = k \end{cases}$$

  - Si $k = 0$, on a alors : $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$
    On en déduit que la section est la réunion des droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ (dans le plan P)
  - si $k \neq 0$, l'équation $xy = k$ est l'équation de l'hyperbole d'équation $xy = k$ (dans le plan P)

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ avec le plan Q d'équation $y = k$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} z = xy \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = kx \\ y = k \end{cases}$$

  La section est donc la droite d'équation $z = kx$ (dans le plan Q)

- Un point M(x ; y ; z) appartient à la section du paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ avec le plan H d'équation $x = k$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} z = xy \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = ky \\ x = k \end{cases}$$

  La section est donc la droite d'équation $z = ky$ (dans le plan H)