

# MATRICES - OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

## 1) DÉFINITIONS

### Définition :

Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls. Une matrice de **dimension**  $m \times n$  est un tableau rectangulaire formé de  $m$  lignes et  $n$  colonnes de nombres réels

On dit aussi la taille ou le format d'une matrice.

### Remarque :

Quand on parle de dimension  $m \times n$ , on ne calcule pas le produit !

Par exemple :  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice de 2 lignes et 3 colonnes, donc de taille  $2 \times 3$ .

### Définitions :

- **Une matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne.
- **Une matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne.
- **Une matrice carrée** d'ordre  $n$  est une matrice  $n \times n$ .

**Exemple :**  $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  est une matrice ligne,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une matrice colonne et  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée d'ordre 3.

### Écriture générale d'une matrice :

Une matrice  $A$  de dimension  $m \times n$  (où  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ) peut s'écrire sous cette forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

taille  $m \times n$

Le coefficient  $a_{i,j}$  est le nombre placé à la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne.

Les nombres  $a_{ij}$  (notés parfois  $a_{i,j}$  pour éviter les confusions) (où  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ ) s'appellent **les coefficients** de la matrice  $A$ .

On peut aussi noter  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ .

### Définition :

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont la même dimension et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

## 2) MATRICES PARTICULIÈRES

### Définition :

**La matrice nulle** d'ordre  $n$ , notée  $O_n$ , est la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont nuls.

### Définition :

Dans une matrice carrée d'ordre  $n$ , les coefficients  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  forment **la diagonale principale** de la matrice.

Une matrice carrée est **diagonale** si et seulement si ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

**Exemple :**  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale.

### Définition :

**La matrice unité** d'ordre  $n$  (ou matrice identité d'ordre  $n$ ), notée  $I_n$ , est la matrice carrée d'ordre  $n$  contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

**Exemple :**  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 3 ) OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

### A ) ADDITION ET MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

#### Définition :

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  deux matrices de même taille  $m \times n$ .

**La somme**  $A+B$  est la matrice définie par  $A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ .

On ne peut ajouter que des matrices de même taille, et pour cela on ajoute les coefficients situés à la même place.

**Exemple :**  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

#### Remarques :

- On a de façon évidente  $A+B=B+A$
- Pour toute matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ , on a  $A+O_n=A$

#### Définition :

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  une matrice et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

La matrice  $\lambda A$  est la matrice définie par  $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ .

- Multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous les coefficients par ce réel.
- Par convention, on écrit le réel  $\lambda$  à gauche de la matrice  $A$ .

**Exemple :**  $3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

#### Remarques :

- Les règles de priorité sont les mêmes qu'avec les réels :  $5A+2B$  désigne la matrice  $(5A)+(2B)$
- On note  $-A$  la matrice  $(-1) \times A$ .  $-A$  est **la matrice opposée** de  $A$ .
- On peut maintenant définir la différence de deux matrices  $A$  et  $B$  de même taille :  $A-B=A+(-1)B$ .

## B.) MULTIPLICATION D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

### Définition :

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Soit  $A = (a_{1j})$  une matrice ligne de dimension  $1 \times n$  et  $B = (b_{i1})$  une matrice colonne de dimension  $n \times 1$

La matrice  $A \times B$  est la matrice définie par :

$$A \times B = (a_{11} \ a_{12} \ , \dots \ , \ a_{1n}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1}$$

le nombre de colonnes de A est donc égal au nombre de lignes de B .

**Exemple :**  $(1 \ 0 \ 5) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 2 + 5 \times 2 = 10$

## C.) MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES

### Définition :

Soit A une matrice de dimension  $m \times n$  et B une matrice de taille  $n \times p$  .

**Le produit**  $A \times B$  ou  $A B$  est la matrice de dimension  $m \times p$  dont le coefficient situé à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est le coefficient du produit de la ligne  $i$  de A par la colonne  $j$  de B pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq p$  .

Le produit  $AB$  de deux matrices A et B existe si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

### Exemple :

Le produit d'une matrice  $2 \times 3$  par une matrice  $3 \times 2$  est une matrice  $2 \times 2$  .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 3 \\ -1 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 & -1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Au brouillon, il est beaucoup plus simple de présenter les calculs de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La plupart des calculatrices de lycée permettent d'obtenir le produit de deux matrices . **Avec une TI inspire :**



Define a=	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Terminé
Define b=	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	Terminé
a . b	$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	

### Propriété :

Soit A , B , C des matrices carrées d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  .

- **Associativité** :  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C = ABC$
- **Distributivité** :  $A \times (B + C) = AB + AC$  et  $(A + B) \times C = AC + BC$
- Produit par un réel  $\lambda$  :  $(\lambda A) \times B = \lambda AB$  et  $A \times (\lambda B) = \lambda AB$
- Soit  $I_n$  la matrice unité d'ordre  $n$  alors  $I_n \times A = A$  et  $A \times I_n = A$  .

### Attention :

- La multiplication de matrices n'est pas commutative :  
en général,  $A \times B \neq B \times A$



Define a=	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	Terminé
Define b=	$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé

a . b	$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 13 & 8 \end{bmatrix}$
b . a	$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 11 & 1 & 19 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$


- Soit A, B et C des matrices carrées d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$AB=AC$  n'implique pas que  $B=C$  ( On ne peut pas simplifier par A )

	Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé	$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$
	Define $b = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	Terminé	$a \cdot c$	$\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$
	Define $c = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	Terminé		

- Soit A et B et C des matrices d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$AB=O_n$  n'implique pas que  $A=O_n$  ou  $B=O_n$

	Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé		
	Define $b = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$	Terminé		
	$a \cdot b$		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	$b \cdot a$		$\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$	

## D.) PUISSANCES ENTIÈRES D'UNE MATRICE


### Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $A^2 = A \times A$ ,  $A^3 = A \times A \times A$ , etc.

Plus généralement, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k$  est le produit de  $k$  matrices toutes égales à A.

Par convention, on posera  $A^0 = I_n$ .

	Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé		
	$a^2$		$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$	
	$a^5$		$\begin{bmatrix} 512 & 256 \\ 1024 & 512 \end{bmatrix}$	
	$a^{12}$		$\begin{bmatrix} 8388608 & 4194304 \\ 16777216 & 8388608 \end{bmatrix}$	

## 4.) MATRICES INVERSIBLES ET APPLICATION AUX SYSTÈMES

### A.) MATRICE INVERSIBLES

#### Définition et propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre  $n$ , notée  $A^{-1}$  telle que  $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$ .

La matrice  $A^{-1}$  est unique, elle est appelée **matrice inverse** de A.

On admet que :

$$A A^{-1} = I_n \Leftrightarrow A^{-1} A = I_n$$

Dans les exercices il suffira de faire un seul des deux produits.

#### Preuve : (de l'unicité)

Supposons que A possède deux inverses, notés B et B'. On a donc  $AB = I_n$ ,  $AB' = I_n$ ,  $BA = I_n$ ,  $B'A = I_n$ .

On peut donc écrire :  $B'(AB) = B'I_n = B'$  et  $(B'A)B = I_n B = B$

Or  $B'(AB) = (B'A)B$ . On a donc  $B' = B$ .

**Remarque :** Une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , de dimension 2, est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$  ( preuve dans la feuille d'exercices)

#### Exemple :



Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé
Define $b = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$	Terminé
$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$b \cdot a$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible de matrice inverse  $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$

$a^{-1}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
----------	---

Avec la TI-nspire, on peut obtenir directement (si elle existe) la matrice inverse.

## B) APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

### Propriété :

Un système linéaire à  $n$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme  $AX=Y$ , où  $A=(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$

sont des matrices colonnes de dimension  $n \times 1$ .

Si  $A$  est inversible, le système a alors une solution unique :  $X=A^{-1}Y$ .

### Preuve :

Si  $A$  est inversible, on peut écrire :

$$AX=Y \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}Y \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}Y \Rightarrow X=A^{-1}Y$$

par associativité.

Réciproquement,

$$X=A^{-1}Y \Rightarrow AX=AA^{-1}Y=I_n Y=Y.$$

$A^{-1}Y$  est donc l'unique solution du système écrite sous forme matricielle.

**Exemple :** Résoudre  $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases}$

On pose  $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a donc  $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=Y$

Avec la calculatrice on voit que  $A$  est inversible et on détermine  $A^{-1}$ .



Define  $a=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  Terminé

$a^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ainsi :  $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$



Define  $y=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  Terminé

$a^{-1} \cdot y$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$