

MATRICES - OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

1) DÉFINITIONS

Définition :

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Une matrice de **dimension** $m \times n$ est un tableau rectangulaire formé de m lignes et n colonnes de nombres réels

On dit aussi la taille ou le format d'une matrice.

Remarque :

Quand on parle de dimension $m \times n$, on ne calcule pas le produit !

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de 2 lignes et 3 colonnes, donc de taille 2×3 .

Définitions :

- **Une matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne.
- **Une matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne.
- **Une matrice carrée** d'ordre n est une matrice $n \times n$.

Exemple : $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne , $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est un matrice carrée d'ordre 3.

Écriture générale d'une matrice :

Une matrice A de dimension $m \times n$ (où $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$) peut s'écrire sous cette forme :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{taille } m \times n}$$

Le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre placé à la i -ième ligne et la j -ième colonne.

Les nombres a_{ij} (notés parfois $a_{i,j}$ pour éviter les confusions) (où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) s'appellent **les coefficients** de la matrice A .

On peut aussi noter $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

Définition :

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont la même dimension et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

2) MATRICES PARTICULIÈRES

Définition :

La matrice nulle d'ordre n , notée O_n , est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

Définition :

Dans une matrice carrée d'ordre n , les coefficients $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

Une matrice carrée est **diagonale** si et seulement si ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Définition :

La matrice unité d'ordre n (ou matrice identité d'ordre n), notée I_n , est la matrice carrée d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

A) ADDITION ET MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ deux matrices de même taille $m \times n$.

La somme $A+B$ est la matrice définie par $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

On ne peut ajouter que des matrices de même taille, et pour cela on ajoute les coefficients situés à la même place.

Exemple : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Remarques :

- On a de façon évidente $A+B=B+A$
- Pour toute matrice carrée A d'ordre n , on a $A+O_n=A$

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La matrice λA est la matrice définie par $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

- Multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous les coefficients par ce réel.
- Par convention, on écrit le réel λ à gauche de la matrice A .

Exemple : $3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

Remarques :

- Les règles de priorité sont les mêmes qu'avec les réels : $5A+2B$ désigne la matrice $(5A)+(2B)$
- On note $-A$ la matrice $(-1) \times A$. $-A$ est la matrice opposée de A .
- On peut maintenant définir la différence de deux matrices A et B de même taille : $A-B=A+(-1)B$.

B) MULTIPLICATION D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice colonne de dimension $n \times 1$

La matrice $A \times B$ est la matrice définie par :

$$A \times B = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1}$$

le nombre de colonnes de A est donc égal au nombre de lignes de B .

Exemple : $(1 \ 0 \ 5) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 2 + 5 \times 2 = 10$

C) MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES

Définition :

Soit A une matrice de dimension $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.

Le produit $A \times B$ ou $A B$ est la matrice de dimension $m \times p$ dont le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est le coefficient du produit de la ligne i de A par la colonne j de B pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$.

Le produit AB de deux matrices A et B existe si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Exemple :

Le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×2 est une matrice 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 3 \\ -1 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 & -1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Au brouillon, il est beaucoup plus simple de présenter les calculs de la façon suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (sans détailler les calculs)

La plupart des calculatrices de lycée permettent d'obtenir le produit de deux matrices . Avec une TIInspire:

	Define $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Terminé
	Define $b = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	Terminé
$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	

Propriété :

Soit A , B , C des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

- Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C = ABC$
- Distributivité : $A \times (B+C) = AB+AC$ et $(A+B) \times C = AC+BC$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A) \times B = \lambda AB$ et $A \times (\lambda B) = \lambda AB$
- Soit I_n la matrice unité d'ordre n alors $I_n \times A = A$ et $A \times I_n = A$.

Attention :

- La multiplication de matrices n'est pas commutative :

en général, $A \times B \neq B \times A$

	Define $a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	Terminé	$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 13 & 8 \end{bmatrix}$
	Define $b = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé	$b \cdot a$	$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 11 & 1 & 19 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

- Soit A, B et C des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

$AB=AC$ n'implique pas que $B=C$ (On ne peut pas simplifier par A)

Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé	$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$
Define $b = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	Terminé	$a \cdot c$	$\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$
Define $c = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	Terminé		

- Soit A et B et C des matrices d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

$AB=O_n$ n'implique pas que $A=O_n$ ou $B=O_n$

Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé	$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Define $b = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$	Terminé	$b \cdot a$	$\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$

D) PUISSANCES ENTIÈRES D'UNE MATRICE

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, etc.

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est le produit de k matrices toutes égales à A.

Par convention, on posera $A^0 = I_n$.

Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	Terminé	a^2	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$
		a^5	$\begin{bmatrix} 512 & 256 \\ 1024 & 512 \end{bmatrix}$
		a^{12}	$\begin{bmatrix} 8388608 & 4194304 \\ 16777216 & 8388608 \end{bmatrix}$

4) MATRICES INVERSIBLES ET APPLICATION AUX SYSTÈMES

A) MATRICE INVERSIBLES

Définition et propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

La matrice A^{-1} est unique, elle est appelée **matrice inverse** de A.

On admet que :

$$A A^{-1} = I_n \Leftrightarrow A^{-1} A = I_n$$

Dans les exercices il suffira de faire un seul des deux produits.

Preuve :

(de l'unicité)

Supposons que A possède deux inverses, notés B et B'. On a donc $AB=I_n$, $AB'=I_n$, $BA=I_n$, $B'A=I_n$.

On peut donc écrire : $B'(AB)=B'I_n=B'$ et $(B'A)B=I_nB=B$

Or $B'(AB)=(B'A)B$. On a donc $B'=B$.

Remarque : Un matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de dimension 2, est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ (preuve dans la feuille d'exercices)

Exemple :

Define $a = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Terminé

Define $b = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$

Terminé



$a \cdot b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b \cdot a$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible de matrice inverse $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$

a^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Avec la TIInspire, on peut obtenir directement (si elle existe) la matrice inverse.

B) APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Propriété :

Un système linéaire à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme $A X = Y$, où $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n , $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$

sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si A est inversible, le système a alors une solution unique : $X = A^{-1}Y$.

Preuve :

Si A est inversible, on peut écrire :

$$A X = Y \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}Y \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$$

par associativité.

Réciproquement,

$$X = A^{-1}Y \Rightarrow AX = AA^{-1}Y = I_n Y = Y.$$

$A^{-1}Y$ est donc l'unique solution du système écrite sous forme matricielle.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=Y$

Avec la calculatrice on voit que A est inversible et on détermine A^{-1} .

Define $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a^{-1}

Terminé

Ainsi : $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Define $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$a^{-1} \cdot y$

Terminé