Notion de matrice :appendre le cours

Ex 9-1 : ***Vrai ou faux***

1) Une matrice de taille $n\times p$ possède p lignes et n colonnes.

2) Le coefficient d'une matrice A noté a_{ij} se situe à la i -ème ligne et à la- j -ième colonne.

3) Une matrice nulle est nécessairement carrée.

4) Une matrice unité est nécessairement carrée.

5) Une matrice ligne est aussi appelée vecteur ligne.

6) La taille d'une matrice ligne est notée $1\times p$ où $p\in\mathbb{Z}$.

7) On peut additionner deux matrices de tailles différentes.

8) On peut multiplier deux matrices de tailles différentes.

9) On peut multiplier deux matrices de n'importe quelles tailles.

10) Pour que le produit AB soit une matrice carrée, il faut que A et B soient des matrices carrées de même taille.

11) Pour que le produit AB soit une matrice carrée, il suffit que A et B soient des matrices carrées de même taille.

12) AB=AC implique B=C

13) $AB=O_n$ implique $A=O_n$ ou $B=O_n$

Calculs élémentaires

Ex 9-2 : ***Somme, produit, commutativité***

Dans chacun des cas, effectuer la somme A+B et les produits des matrices A B et BA lorsque cela est possible.

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 7 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 7\end{pmatrix}$

4) La multiplication des matrices est-elle commutative ?

Ex 9-3 : ***Combinaisons linéaires***

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$

1) Calculer $2A-3B$

2) Déterminer les réels x et y tels que $xA+yB=\begin{pmatrix}7 & 7\\2 & 0\end{pmatrix}$

Ex 9-4 : ***Carré***

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\-5 & x\end{pmatrix}$

Déterminer la valeur de x telle que $A^2=\begin{pmatrix}-11 & 12\\-15 & -20\end{pmatrix}$

Ex 9-5 : ***Identités remarquables***

1) On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{pmatrix}$

a) Calculer et comparer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$

b) Développer $(A+B)^2$

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'identité remarquable soit vérifiée.

2) On considère maintenant les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Vérifier que les matrices A et B vérifient la condition trouvée précédemment et comparer à nouveau les égalités $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$

Ex 9-6 : *Puissances de matrices et récurrence*

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,8\\ 0,2 & 0,2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0,2 & -0,8\\ -0,2 & 0,8\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,4\\ 0,1 & 0,6\end{pmatrix}$

1) Montrer que $M=A+0,5B$

2) Vérifier que $A^2=A$ et que $AB=BA=O_2$

3) Montrer (par récurrence) que pour tout entier naturel n strictement positif : $A^n=A$.

On admet que $B^n=B$.

4) On considère la relation $M^n=A+0,5^nB$.

a) Montrer que cette relation est vraie pour $n=0$.

b) Montrer que cette relation est vraie pour tout entier naturel n strictement positif.

Inverses de matrices :

Ex 9-7 : ***Développement et inverses***

Dans chacun des cas ci-dessous, A est une matrice de dimension $n \times p$ (on peut avoir $n = p$) et I est une matrice identité.
Préciser les tailles possibles des matrices B et I, puis développer les expressions données :

1) A(B+I)

2) $(\mathrm{B}+\mathrm{A})\mathrm{A}^{-1}$

3) $\mathrm{AB}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}-\mathrm{AB})$

4) B(I-A)

Ex 9-8 : ***Factorisation et inverses***

Factoriser les expressions suivantes :

1) $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^{-1}\mathrm{A}+(\mathrm{A}+\mathrm{I})^{-1}$

2) $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^{-1}+\mathrm{A}(\mathrm{A}+\mathrm{I})^{-1}$

3) $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^{-1}+\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{A}^{-1})$

Ex 9-9 : ***Avec la calculatrice***

Avec la calculatrice déterminer s'ils existent les inverses des matrices ci-dessous :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \ , \ \mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix} \ , \ \mathrm{C}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ex 9-10 : ***Vérifier que deux matrices sont inverses l'une de l'autre***

Les matrices suivantes sont-elles inverses l'une de l'autre ?

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et elle même

Ex 9-11 : ***Inverse d'un produit***

Soit A et B deux matrices inversibles.
Démontrer que $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Ex 9-12 : ***Inverse d'une matrice*** 2×2 ***(condition d'existence à connaître)***

Soit $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que $(a+d)A-A^2=(ad-bc)I_2$.

2) Factoriser le membre de gauche par A.

3) En déduire une condition pour que le matrice A admette un inverse.

4) Déterminer cet inverse.

Ex 9-13 : ***Inverse à partir d'une relation polynomiale***

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice J telle que $A=I_4-aJ$

2) Calculer J^2 , J^3 et J^4 et en déduire que $I_4=I_4-a^4J^4$.

3) Développer $(I_4-aJ)(I_4+aJ+a^2J^2+a^3J^3)$
En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de J, puis en fonction de a .

4) Vérifier avec la calculatrice ou un logiciel.

Ex 9-14 : ***Inverse à partir d'une relation polynomiale***

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et A^3 .

2) Déterminer les réels a et b tels que $A^3=aA+bI_4$

3) En déduire l'inverse de A.

Ex 9-15 : ***Système linéaire de deux équations à deux inconnues***

On considère le système linéaire : $\begin{cases}4x-3y=-2\\ x-y=-5\end{cases}$ (S)

1) Écrire le système sous la forme AX=Y.

2) Résoudre le système (S) en utilisant l'inverse de la matrice A.

Ex 9-16 : ***Système linéaire de trois équations à trois inconnues***

On considère le système linéaire : $\begin{cases} 4x-2y+z=7 \\ -x+y-z=-9 \\ x-5y-2z=10 \end{cases}$ (S)

1) Écrire le système sous la forme AX=Y.

2) Résoudre le système (S) en utilisant l'inverse de la matrice A.

Ex 9-17 : ***Matrice diagonalisable et puissances***

On considère les matrices , $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

2) Montrer que $A=PDP^{-1}$.

3) Montrer que $A^n = P D^n P^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4) Avec la calculatrice, conjecturer une expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis démontrer cette conjecture.

5) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Problèmes :

Ex 9-18 : *Baccalauréat S Amérique du nord juin 2015 – ex 4*

Parabole passant par trois points : Congruences - Matrices

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(1 ; p), B(−1 ; q) et C(2 ; r).
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors

$$\begin{cases} -3p + q + 2r & \equiv & 0\,[6] \\ 3p - 3q & \equiv & 0\,[6] \\ 6p + 2q - 2r & \equiv & 0\,[6] \end{cases}$$

2. En déduire que $\begin{cases} q - r & \equiv & 0\,[3] \\ p - q & \equiv & 0\,[2] \end{cases}$.
3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r \equiv 0\,[3] \\ p - q \equiv 0\,[2] \\ \text{A, B, C ne sont pas alignés} \end{cases}$

alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

Ex 9-19 : *Baccalauréat S Centres étrangers 8 juin 2016 – ex 4*

Chiffrement de Hill : Congruences – Bézout - Matrices

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1	On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.
Étape 2	On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :
Étape 3	On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.
Étape 4	On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.
Étape 5	On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2. Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Tableau de l'étape 2 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
   Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u \times a \equiv 1$ modulo 26.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
from math import *
a=int(input("a="))
u=0
r=0
while (r!=1):
    u=u+1
    r=(u*a)%26
print(u)
```

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$
2. En utilisant la question B .2., établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{cases}$
3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Ex 9-20 : *Baccalauréat S Métropole sept 2017 – ex 4*

Points de coordonnées entières dans l'espace : Équations diophantiennes - Matrices

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 5 ; −2), B(7 ; −1 ; 3) et C(−2 ; 7 ; −2) et on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice
$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.
À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.
En déduire que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne :
$10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x ; y ; z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$.
On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
   a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation
   $(E) : 2x + 3y = 11$.
   b. Justifier que le couple $(7 ; -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.
   c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x ; y ; z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.
   a. Montrer que y est impair.
   b. Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.
   c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
   Montrer que le point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.
   d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.

Ex 9-21 : ***Baccalauréat S Pondichéry avril 2016 – ex 3***

Cryptographie : Congruences – Gauss - Matrices

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.
Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$.
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.
Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.
On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\,;\,b)$ solutions de l'équation (E).

a. Vérifier que le couple $(6\,;\,3)$ est une solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(a\,;\,b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

2. *Codage avec la matrice* Q

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \to X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{OF.}$$

Le mot JE est codé en le mot OF.
Coder le mot DO.

3. *Procédure de décodage*
On conserve les mêmes notations que pour le codage.
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a. Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$

b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$

c. Décoder le mot SG.