MATRICES - OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

1) DÉFINITIONS

Définition :

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Une matrice de **dimension** $m \times n$ est un tableau rectangulaire formé de m lignes et n colonnes de nombres réels

On dit aussi la taille ou le format d'une matrice.

Remarque :

Quand on parle de dimension $m \times n$, on ne calcule pas le produit !

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de 2 lignes et 3 colonnes, donc de taille 2×3 .

Définitions :

- **Une matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne.
- **Une matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne.
- **Une matrice carrée** d'ordre n est une matrice $n \times n$.

Exemple : $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne , $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est un matrice carrée d'ordre 3.

Écriture générale d'une matrice :

Une matrice A de dimension $m \times n$ (où $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$) peut s'écrire sous cette forme :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{taille } m \times n}$$

Le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre placé à la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Les nombres a_{ij} (notés parfois $a_{i,j}$ pour éviter les confusions) (où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) s'appellent **les coefficients** de la matrice A .

On peut aussi noter $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$.

Définition :

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont la même dimension et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

2) MATRICES PARTICULIÈRES

Définition :

La matrice nulle d'ordre n , notée O_n , est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

Définition :

Dans une matrice carrée d'ordre n , les coefficients a_{11} , a_{22} , …, a_{nn} forment l**a diagonale principale** de la matrice.

Une matrice carrée est **diagonale** si et seulement si ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Définition :

La matrice unité d'ordre n (ou matrice identité d'ordre n), notée I_n , est la matrice carrée d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemple : $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

A) ADDITION ET MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ et $\mathrm{B}=(b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ deux matrices de même taille $m\times n$.

La somme A+B est la matrice définie par $\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$.

On ne peut ajouter que des matrices de même taille, et pour cela on ajoute les coefficients situés à la même place.

Exemple : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Remarques :

- On a de façon évidente $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$
- Pour toute matrice carrée A d'ordre n , on a $\mathrm{A}+\mathrm{O}_n=\mathrm{A}$

Définition :

Soit $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ une matrice et $\lambda\in\mathbb{R}$.

La matrice $\lambda\,\mathrm{A}$ est la matrice définie par $\lambda\,\mathrm{A}=(\lambda\, a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$.

- Multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous les coefficients par ce réel.
- Par convention, on écrit le réel λ à gauche de la matrice A.

Exemple : $3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

Remarques :

- Les règles de priorité sont les mêmes qu'avec les réels : 5 A+2 B désigne la matrice (5 A)+(2B)
- On note $-\mathrm{A}$ la matrice $(-1)\times\mathrm{A}$. $-\mathrm{A}$ est **la matrice opposée** de A.
- On peut maintenant définir la différence de deux matrices A et B de même taille : $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}+(-1)\,\mathrm{B}$.

B) MULTIPLICATION D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $A=(a_{1j})$ une matrice ligne de dimension $1\times n$ et $B=(b_{i1})$ une matrice colonne de dimension $n\times 1$

La matrice $A\times B$ est la matrice définie par :

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ,\dots, & a_{1n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$$

le nombre de colonnes de A est donc égal au nombre de lignes de B .

Exemple : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=1\times 0+0\times 2+5\times 2=10$

C) MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES

Définition :

Soit A une matrice de dimension $m\times n$ et B une matrice de taille $n\times p$.

Le produit A×B ou A B est la matrice de dimension $m\times p$ dont le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est le coefficient du produit de la ligne i de A par la colonne j de B pour $1\leqslant i\leqslant m$ et $1\leqslant j\leqslant p$.

Le produit AB de deux matrices A et B existe si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Exemple :

Le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×2 est une matrice 2×2 .

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times 1+2\times(-1)+0\times 1 & 1\times 2+2\times 2+0\times 3\\ -1\times 0+0\times(-1)+1\times 1 & -1\times 2+0\times 2+1\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Au brouillon, il est beaucoup plus simple de présenter les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

(sans détailler les calculs)

La plupart des calculatrices de lycée permettent d'obtenir le produit de deux matrices . **Avec une TI nspire :**

Define $a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $b=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ *Terminé*

$a\cdot b$ $\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Propriété :

Soit A , B , C des matrices carrées d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

- **Associativité** : $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)=A\times B\times C=ABC$
- **Distributivité** : $A\times(B+C)=AB+AC$ et $(A+B)\times C=AC+BC$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A)\times B=\lambda AB$ et $A\times(\lambda B)=\lambda AB$
- Soit I_n la matrice unité d'ordre n alors $I_n\times A=A$ et $A\times I_n=A$.

Attention :

- La multiplication de matrices n'est pas commutative :

  en général, $A\times B\neq B\times A$

Define $a=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $b=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ *Terminé*

$a\cdot b$ $\begin{bmatrix}-1 & -6 & 2\\ 0 & -1 & 8\\ 2 & 13 & 8\end{bmatrix}$

$b\cdot a$ $\begin{bmatrix}-4 & 2 & -3\\ 11 & 1 & 19\\ 2 & 4 & 9\end{bmatrix}$

- Soit A, B et C des matrices carrées d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

AB=AC n'implique pas que B=C (On ne peut pas simplifier par A)

Define $a=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $b=\begin{bmatrix}4&-2\\2&1\end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $c=\begin{bmatrix}5&-5\\0&7\end{bmatrix}$ *Terminé*

$a\cdot b$ $\begin{bmatrix}10&-3\\20&-6\end{bmatrix}$

$a\cdot c$ $\begin{bmatrix}10&-3\\20&-6\end{bmatrix}$

- Soit A et B et C des matrices d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

$AB=O_n$ n'implique pas que $A=O_n$ ou $B=O_n$

Define $a=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $b=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&6\end{bmatrix}$ *Terminé*

$a\cdot b$ $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$b\cdot a$ $\begin{bmatrix}-10&-5\\20&10\end{bmatrix}$

D) PUISSANCES ENTIÈRES D'UNE MATRICE

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

On note $A^2=A\times A$, $A^3=A\times A\times A$, etc.

Plus généralement, pour $k\in\mathbb{N}^*$, A^k est le produit de k matrices toutes égales à A .

Par convention, on posera $A^0=I_n$.

Define $a=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$ *Terminé*

a^2 $\begin{bmatrix}8&4\\16&8\end{bmatrix}$

a^5 $\begin{bmatrix}512&256\\1024&512\end{bmatrix}$

a^{12} $\begin{bmatrix}8388608&4194304\\16777216&8388608\end{bmatrix}$

4) MATRICES INVERSIBLES ET APPLICATION AUX SYSTÈMES

A) MATRICE INVERSIBLES

Définition et propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} telle que $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I_n$.

La matrice A^{-1} est unique, elle et appelée **matrice inverse** de A .

On admet que :
$A\,A^{-1}=I_n \Leftrightarrow A^{-1}A=I_n$

Dans les exercices il suffira de faire un seul des deux produits.

Preuve : (de l'unicité)

Supposons que A possède deux inverses, notés B et B' . On a donc $AB=I_n$, $AB'=I_n$, $BA=I_n$, $B'A=I_n$.

On peut donc écrire : $B'(AB)=B'I_n=B'$ et $(B'A)B=I_nB=B$

Or $B'(AB)=(B'A)B$. On a donc B'=B .

Remarque : Un matrice $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$,de dimension 2, est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$ (preuve dans la feuille d'exercices)

Exemple :

Define $a=\begin{bmatrix}2&0\\4&2\end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $b=\begin{bmatrix}0.5&0\\-1&0.5\end{bmatrix}$ *Terminé*

$a\cdot b$ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$b\cdot a$ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix}2&0\\4&2\end{pmatrix}$ est inversible de matrice inverse $\begin{pmatrix}0{,}5&0\\-1&0{,}5\end{pmatrix}$

a^{-1} $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Avec la TInspire, on peut obtenir directement (si elle existe) la matrice inverse.

B) APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Propriété :

Un système linéaire à n inconnues x_1 , x_2 , …, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,n}x_n=y_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ldots+a_{n,n}x_n=y_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme A X=Y , où $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une matrice carrée d'ordre n , $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$

sont des matrices colonnes de dimension $n\times 1$.

Si A est inversible, le système a alors une solution unique : $X=A^{-1}Y$.

Preuve :

Si A est inversible, on peut écrire :

$$A\,X=Y \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}Y \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)X=A^{-1}Y}_{\text{par associativité.}} \Rightarrow X=A^{-1}Y$$

Réciproquement,

$$X=A^{-1}Y \Rightarrow AX=AA^{-1}Y=I_nY=Y .$$

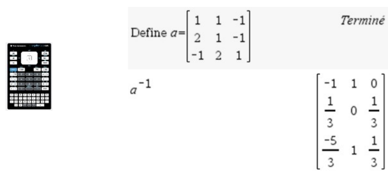
$A^{-1}Y$ est donc l'unique solution du système écrite sous forme matricielle.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases}$

On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=Y$

Avec la calculatrice on voit que A est inversible
et on détermine A^{-1} .



Ainsi : $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$