MATRICES - OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

1) DÉFINITIONS

Définition :

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Une matrice de **dimension** $m \times n$ est un tableau rectangulaire formé de m lignes et n colonnes de nombres réels

On dit aussi la taille ou le format d'une matrice.

Remarque :

Quand on parle de dimension $m \times n$, on ne calcule pas le produit !

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est

Définitions :

- **Une matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne.
- **Une matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne.
- **Une matrice carrée** d'ordre n est une matrice $n \times n$.

Exemple :

Écriture générale d'une matrice :

Une matrice A de dimension $m \times n$ (où $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$) peut s'écrire sous cette forme :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{taille } m \times n}$$

Les nombres a_{ij} (notés parfois $a_{i,j}$ pour éviter les confusions) (où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) s'appellent **les coefficients** de la matrice A .

On peut aussi noter $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$.

Définition :

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont la même dimension et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

2) MATRICES PARTICULIÈRES

Définition :

La matrice nulle d'ordre n , notée O_n , est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

Définition :

Dans une matrice carrée d'ordre n , les coefficients a_{11} , a_{22} , …, a_{nn} forment l**a diagonale principale** de la matrice.

Une matrice carrée est **diagonale** si et seulement si ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

Exemple :

Définition :

La matrice unité d'ordre n (ou matrice identité d'ordre n), notée I_n , est la matrice carrée d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemple :

3) OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

A) ADDITION ET MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ et $\mathrm{B}=(b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ deux matrices de même taille $m\times n$.

La somme A+B est la matrice définie par $\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$.

On ne peut ajouter que des matrices de même taille, et pour cela on ajoute les coefficients situés à la même place.

Exemple : $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}=$

Remarques :

- On a de façon évidente
- Pour toute matrice carrée A d'ordre n , on a

Définition :

Soit $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ une matrice et $\lambda\in\mathbb{R}$.

La matrice $\lambda\,\mathrm{A}$ est la matrice définie par $\lambda\,\mathrm{A}=(\lambda\,a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$.

- Multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous les coefficients par ce réel.
- Par convention, on écrit le réel λ à gauche de la matrice A.

Exemple : $3\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}=$

Remarques :

- Les règles de priorité sont les mêmes qu'avec les réels : 5 A+2 B désigne la matrice (5 A)+(2B)
- On note $-\mathrm{A}$ la matrice $(-1)\times\mathrm{A}$. $-\mathrm{A}$ est **la matrice opposée** de A.
- On peut maintenant définir la différence de deux matrices A et B de même taille : $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}+(-1)\,\mathrm{B}$.

B) MULTIPLICATION D’UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $A=(a_{1j})$ une matrice ligne de dimension $1\times n$ et $B=(b_{i1})$ une matrice colonne de dimension $n\times 1$

La matrice $A\times B$ est la matrice définie par :

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ,\dots, & a_{1n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$$

le nombre de colonnes de A est donc égal au nombre de lignes de B .

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=$

C) MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES

Définition :

Soit A une matrice de dimension $m\times n$ et B une matrice de taille $n\times p$.

Le produit A×B ou A B est la matrice de dimension $m\times p$ dont le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est le coefficient du produit de la ligne i de A par la colonne j de B pour $1\leqslant i\leqslant m$ et $1\leqslant j\leqslant p$.

Le produit AB de deux matrices A et B existe si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Exemple :

Le produit d’une matrice 2×3 par une matrice 3×2 est une matrice 2×2 .

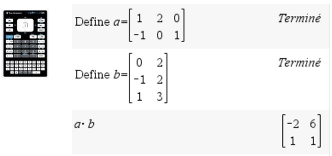
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 2\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=$$

Au brouillon, il est beaucoup plus simple de présenter les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 2\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

(sans détailler les calculs)

La plupart des calculatrices de lycée permettent d'obtenir le produit de deux matrices . **Avec une TI nspire :**



Propriété :

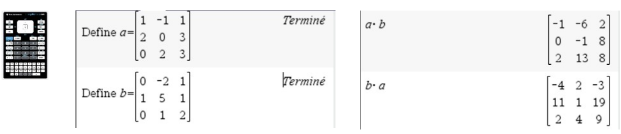
Soit A , B , C des matrices carrées d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

- **Associativité** : $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)=A\times B\times C=ABC$
- **Distributivité** : $A\times(B+C)=AB+AC$ et $(A+B)\times C=AC+BC$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A)\times B=\lambda AB$ et $A\times(\lambda B)=\lambda AB$
- Soit I_n la matrice unité d'ordre n alors $I_n\times A=A$ et $A\times I_n=A$.

Attention :

- La multiplication de matrices n'est pas commutative :

  en général, $A\times B\neq B\times A$



- Soit A, B et C des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Define $a=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $b=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $c=\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	*Terminé*
$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$
$a \cdot c$	$\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$

- Soit A et B et C des matrices d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Define $a=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $b=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$	*Terminé*
$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$b \cdot a$	$\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$

D) PUISSANCES ENTIÈRES D'UNE MATRICE

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} \times \mathrm{A}$, $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A}$, etc.

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est le produit de k matrices toutes égales à A .

Par convention, on posera $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$.

Define $a=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	*Terminé*
a^2	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$
a^5	$\begin{bmatrix} 512 & 256 \\ 1024 & 512 \end{bmatrix}$
a^{12}	$\begin{bmatrix} 8388608 & 4194304 \\ 16777216 & 8388608 \end{bmatrix}$

4) MATRICES INVERSIBLES ET APPLICATION AUX SYSTÈMES

A) MATRICE INVERSIBLES

Définition et propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} telle que $\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

La matrice A^{-1} est unique, elle et appelée **matrice inverse** de A .

On admet que : $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$

Dans les exercices il suffira de faire un seul des deux produits.

Preuve : (de l'unicité)

Supposons que A possède deux inverses, notés B et B' . On a donc $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$, $\mathrm{AB}' = \mathrm{I}_n$, $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$, $\mathrm{B}'\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

On peut donc écrire :

Remarque : Un matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,de dimension 2, est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ (preuve dans la feuille d'exercices)

Exemple :

Define $a=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $b=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$	*Terminé*
$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$b \cdot a$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible de matrice inverse $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

a^{-1}	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Avec la TInspire, on peut obtenir directement (si elle existe) la matrice inverse.

B) APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Propriété :

Un système linéaire à n inconnues x_1 , x_2 , …, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,n}x_n=y_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ldots+a_{n,n}x_n=y_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme A X=Y , où $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}$ est une matrice carrée d'ordre n , $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$

sont des matrices colonnes de dimension $n\times 1$.

Si A est inversible, le système a alors une solution unique : $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$.

Preuve :

Si A est inversible, on peut écrire :

A X =Y $\Rightarrow$

Réciproquement,

$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$ $\Rightarrow$

$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$ est donc l'unique solution du système écrite sous forme matricielle.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases}$

On pose

On a donc $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

Avec la calculatrice on voit que A est inversible
et on détermine A^{-1} .

Define $a=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *Terminé*

a^{-1} $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Ainsi : $\mathrm{AX}=\mathrm{Y}$ $\Leftrightarrow$

Define $y=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ *Terminé*

$a^{-1}\cdot y$ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$