PGCD

Ex 7-1 :

1) Déterminer l'ensemble $\mathrm{D}(54)$ des diviseurs positifs de 54 et $\mathrm{D}(270)$ l'ensemble des diviseurs positifs de 270.

2) En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 54 et 270, puis le PGCD de 54 et 270

Ex 7-2 :

1) Vérifier que $5\times181-8\times113=1$

2) En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 181 et 113, puis le PGCD de 181 et 113.

Ex 7-3 : PCDG(*a* ;*b*)=PGCD*(a-c ;b-c)* ?

Soit a , b et c trois entiers.
La proposition $\mathrm{PGCD}(a;b)=\mathrm{PGCD}(a-c;b-c)$ est-elle vraie ? Justifier.

Ex 7-4 :

Soit n un entier naturel et les entiers $a=n+2$ et $b=3n+1$.

1) Montrer que si d divise a et b , alors d divise 5.

2) En déduire les valeurs possibles du PGCD de a et b .

Ex 7-5 :

Déterminer les entiers naturels non nuls a tels que :

$\mathrm{PGCD}(261;a)=87$ et $a<261$

Utiliser PGCD(*a*;*b*)=PGCD(*a-kb*;*b*)

Ex 7-6 :

Montrer que PGCD(1671;1669)=1.

Ex 7-7 :

Montrer que deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.

Ex 7-8 : PGCD *de a(n) et b(n)*

Soit n un entier naturel . Déterminer suivant les valeurs de n les valeurs de :

1) $\text{PGCD}(n;3n+17)$

2) $\text{PGCD}(5n+4;3n-1)$

3) $\text{PGCD}(2n+15;n+3)$

Ex 7-9 : *Montrer l'égalité de deux* PGCD

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On pose $\text{A}=5a+9b$ et $\text{B}=4a+7b$

Montrer que $\text{PGCD}(\text{A};\text{B})=\text{PGCD}(a;b)$

Algorithme d'Euclide et conséquences

Ex 7-10 : *Appliquer l'algorithme*

Déterminer le PGCD de 13234 et de 4568

Vérifier avec la calculatrice.

Ex 7-11 : ***Programmation de l'algorithme d'Euclide***

En utilisant l'instruction python a%b qui donne le reste de la division euclidienne de a par b, compléter l'algorithme ci-dessous qui applique l'algorithme d'Euclide.

```
a=int(input("a="))
b=int(input("b="))
if ( .......... ):
    (a,b)=(b,a)
while (...................):
    r=..........
    a=..........
    b=..........
print(..........)
```

(a,b)=(b,a) permet d'échanger a et b

Ex 7-12 : ***Recherche des diviseurs communs***

1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD de 2002 et de 4598.

2) En déduire D(2002,4598) l'ensemble des diviseurs communs positifs de 2002 et de 4598.

Ex 7-13 : ***Recherche des diviseurs communs***

Soit n un entier naturel tel que :
- dans la division euclidienne de 2791 par n, le reste est 8
- dans la division euclidienne de 2660 par n, le reste est 9.

Déterminer n.

Ex 7-14 : ***Homogénéité***

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

1) Déterminer $\mathrm{PGCD}(m;4m+1)$

2) En déduire $\mathrm{PGCD}(nm;n(4m+1))$

Ex 7-15 : ***Homogénéité***

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

On pose $\mathrm{A}=n^2+7n$ et $\mathrm{B}=n^2+9n+14$

1) Factoriser A et B.

2) Par disjonction de cas sur la parité, déterminer $\text{PGCD}(n;n+2)$

3) En déduire $\text{PGCD}(\text{A};\text{B})$ en fonction de n .

Nombres premiers entre eux

Ex 7-16 :

Soit a et b deux entiers premiers entre eux.
Montrer que $a+b$ est premier avec a et b .

Ex 7-17 :

Soit a , b et c des entiers naturels non nuls tels que a est premier avec b et c .

1) Montrer que tout diviseur commun de a et bc est un diviseur de $\text{PGCD}(ac;bc)$

2) En déduire que tout diviseur commun de a et bc est un diviseur de c .

3) En déduire que a est premier avec bc .

Ex 7-18 : ***Fractions irréductibles***

Soit n un entier naturel.

Montrer que $\dfrac{6n+7}{3n+3}$ est une fraction irréductible.

Ex 7-19 : ***Trouver deux entiers de PGCD connu***

1) Trouver tous les couples $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $a+b=117$ et $\text{PGCD}(a;b)=13$

2) Trouver tous les couples $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $ab=939870$ et $\text{PGCD}(a;b)=177$

Théorème de Bézout

Ex 7-20 : ***Calculer les coefficient de Bézout***

1) Montrer que 96 et 67 sont premiers entre eux et déterminer des entiers u et v tels que $96u+67v=1$

2) En déduire un couple d'entiers $(x;y)$ tels que $96x+67y=11$

3) Déterminer le PGCD de -330 et 473

Ex 7-21 : ***Recherche de u et v***

On considère deux nombres a et b premiers entre eux, avec $a>b$
Compléter l'algorithme ci-dessous permettant de trouver u et v

```
a=int(input("a="))
b=int(input("b="))
u=1
c=a
while (a%b ..........):
    u= ..........
    a=u*c
v= ..........
print ("u=",u,"v=",v)
```

Ex 7-22 : ***Utiliser le théorème de Bézout***

Dans chacun des cas, montrer que pour tout entier n , les entiers a et b sont premiers entre eux.

1) $a=5n+2$ et $b=3n+1$

2) $a=n^4+1$ et $b=n$

3) $a=n+5$ et $b=2n(n+5)+1$

Ex 7-23 : ***Utiliser le théorème de Bézout***

Soit a et b deux entiers strictement positifs tels que $(a^2+ab-b^2)^2=1$.

Montrer que a et b sont premiers entre eux.

Théorème de Gauss

Ex 7-24 : ***Résoudre une équation diophantienne de la forme $ax=b$***

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $4(x-2)=5(y-1)$ (E)

Ex 7-25 : ***Résoudre une équation diophantienne de la forme $ax+by=c$***

On considère l'équation $23x-11y=1(\mathrm{E}_1)$

1) Justifier que cette équation admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Déterminer une solution $(x_0;y_0)$ de (E1).

3) En déduire une solution particulière de $23x-11y=3(\mathrm{E})$

4) En déduire toutes les solutions de (E)

Ex 7-26: ***Résoudre une équation diophantienne de la forme*** $ax+by=c$

On considère les équations $45x+57y=6$ et $15x+19y=1$ (E1)

1) Justifier que l'équation (E_1) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Déterminer une solution $(x_0; y_0)$ de (E1).

3) Montrer que l'équation $45x+57y=6$ est équivalente à l'équation $15x+19y=2$ (E)

4) Déterminer une solution particulière de $15x+19y=2$ (E)

5) Déterminer toutes les solutions de (E)

Ex 7-27: ***Théorème d'Euclide***

Soit a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.

Montrer que si p divise le produit ab, alors p divise a ou p divise b.

Appliquer la dernière propriété du cours :

Si n est divisible par a et par b (premier entre eux), alors n est divisible par le produit ab.

Ex 7- 28 :

Soit un entier naturel n . On pose $a=n(n+1)(n+2)$.

Montrer que a est divisible par 2, 3 et 6.

Ex 7- 29 :

Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1[9]$

En déduire que $10^n + 8$ est divisible par 9 et par 18.

Problèmes :

Ex 7-30 : ***Baccalauréat S Amérique du Sud 22 nov 2016 – ex 4***

Rep_units : Congruences – Divisibilié - Gauss

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \mod 3$.
   b. En déduire que $N_p \equiv p \mod 3$.
   c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$.
   On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

   b. Soit p un entier naturel non nul.
   Montrer que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
   On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.
   c. Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
   e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.
   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots$ [10]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots$ [10]										

   b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
   c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.
2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?
3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

Ex 7-31 : ***Baccalauréat S Métropole 20 juin 2016 – ex 4***

Droites – Coordonnées entières : Divisibilié – PGCD - Bézout

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note pgcd(a, b) le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd(m, n) = pgcd$(p, q) = 1$.
Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0, y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

b. En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $\left(x_0, y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

a. On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.

b. En déduire qu'il existe un couple $\left(x_0, y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que
$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

```
from math import floor

M=int(input("M="))
N=int(input("N="))
P=int(input("P="))
Q=int(input("Q="))

if(N%Q==0):
    X=0
    Y1=-P/Q
    Y2=-P/Q
    while ((floor(Y1)!=Y1) and (floor(Y2)!=Y2)):
        X=X+1
        Y1=M/N*X-P/Q
        Y2=-M/N*X-P/Q
    if (floor(Y1)==Y1):
        print (X,Y1)
    else:
        print (X,Y2)
else:
    print ("il n'y a pas de solutions")
```

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd(M, N) = pgcd$(P, Q) = 1$.

b. Que permet-il d'obtenir ?

Ex 7-32 : *Baccalauréat S Antilles-Guyane spet 2015 – ex 4*

Cryptographie : Congruences – Équation diophantienne - Gauss – Bézout

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.

2. a. Donner un couple solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de cette équation.

b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.

2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1$ [26].

3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.

4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.

5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on?