PGCD :

a étant un entier naturel, l'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de $-a$.
On pourra étendre, si besoin est, la notion de PGCD à des nombres entiers relatifs. On dira par exemple : PGCD(-15 ; 12) = PGCD(15 ; 12) = 3

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé **diviseur commun** à a et b.
L'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle **le plus grand commun diviseur** de a et b, on le note **PGCD(a ; b)**.

Propriétés :

- $\text{PGCD}(a\ ;\ b) \leq a$
- $\text{PGCD}(a\ ;\ b) \leq b$
- $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = \text{PGCD}(b\ ;\ a)$
- Si b divise a, on a $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = b$
- $\text{PGCD}(a\ ;\ 1) = 1$
- $\text{PGCD}(a\ ;\ a) = a$

Lemme d'Euclide :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

- Si $r = 0$, $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = b$
- Si $r \neq 0$, $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = \text{PGCD}(b\ ;\ r)$

Algorithme d'Euclide :

En effectuant des divisions euclidiennes successives : de a par b, puis du diviseur par le reste, … le premier reste non nul est le PGCD de a et de b.

Pour déterminer le PGCD de 410258 et de 126 écrivons les divisions euclidiennes successives :

$410258 = 126 \times 3256 + 2$
$126 = 2 \times 63 + 0$

Donc $\text{PGCD}(410258\ ;\ 126) = 2$

Pour déterminer le PGCD de 15648 et de 657 écrivons les divisions euclidiennes successives :

$15648 = 657 \times 23 + 537$
$657 = 537 \times 1 + 120$
$537 = 120 \times 4 + 57$
$120 = 57 \times 2 + 6$
$57 = 6 \times 9 + 3$
$6 = 3 \times 2 + 0$

Donc $\text{PGCD}(15648\ ;\ 657) = 3$

Ensemble des diviseurs :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

Homogénéité :

Soit a , b et k trois entiers naturels non nuls.

$$\text{PGCD}(ka\ ;\ kb) = k\,\text{PGCD}(a\ ;\ b)$$

Nombres premiers entre eux :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.
On dit aussi que a est premier avec b, ou que b est premier avec a, ou que a et b sont étrangers.

Deux nombres sont donc premiers entre eux s'ils n'ont d'autres diviseurs communs que 1 et -1.

Propriété :

Si p est un nombre premier, p est premier avec tout entier qui n'est pas un de ses multiples

Soit a un entier relatif non nul. Si p est un nombre premier qui ne divise pas a, alors $\text{PGCD}(a\ ;\ p) = 1$, c'est-à-dire que a et p sont premiers entre eux.

Propriété :

Si $D = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$, alors $\dfrac{a}{D}$ et $\dfrac{b}{D}$ sont des entiers relatifs non nuls premiers entre eux.
(il existe a' et b' deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux tels que $a = Da'$ et $b = Db'$)

Théorème de Bézout :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Comment déterminer u et v ?

En utilisant l'algorithme d'Euclide démontrons que 383 et 127 sont premiers entre eux et déterminons des entiers relatifs u et v tels que $383u + 127v = 1$

	Pour déterminer u et v, l'idée est d'exprimer le 1 qui apparaît comme reste de la dernière division en fonction des nombres 383 et 127.
On peut écrire $383 = 127 \times 3 + 2$ (1)	D'après l'égalité (1), on peut écrire $2 = 383 - 127 \times 3$
et $127 = 2 \times 63 + 1$ (2)	D'après l'égalité (2), on peut écrire $1 = 127 - 2 \times 63$ (3) En remplaçant 2 par $383 - 127 \times 3$ dans l'égalité (3), on obtient : $1 = 127 - [383 - 127 \times 3] \times 63$ $= 127 - 383 \times 63 + 127 \times 3 \times 63$ $= 127(1 + 3 \times 63) - 383 \times 63$ $= 383 \times (-63) + 127 \times (190)$
Donc $\text{PGCD}(383\ ;\ 127) = 1$ c'est-à-dire que 383 et 127 sont premiers entre eux.	

On peut donc prendre $u = -63$ et $v = 190$.
Le couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs n'est pas unique, on peut vérifier que les couples $(64\ ;\ -293)$ et $(-317\ ;\ 956)$ répondent aussi à la question.

Théorème de Bézout généralisé : Caractérisation du PGCD

$D = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$ si et seulement si D divise a et b et s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = D$.

La condition D divise a et b est importante . Par exemple $7 = 4 \times 1 + 3 \times 1$, mais 7 n'est pas le PGCD de 4 et 3

Théorème de Gauss :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif.
Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

Propriété : (Théorème d'Euclide)

Soit a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.
Si p divise le produit ab, alors p divise a ou p divise b.

Propriété :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux et soit n un entier naturel.
Si n est divisible par a et par b, alors n est divisible par le produit ab.