# LES NOMBRES COMPLEXES : UTILISATION

## 1 ) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $\dfrac{c-a}{b-a}$

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**Propriétés :**

Soit A, B et C trois points distincts d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$. On a :

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=\dfrac{\text{AC}}{\text{AB}}$
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=(\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}})\ [2\pi]$

**Preuve :**

- On a bien $a\neq b$ car les points sont distincts . On a alors :
  $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=\dfrac{\text{AC}}{\text{AB}}$

- La preuve de la deuxième propriété nécessite de connaître quelques propriétés des angles orientés de vecteurs qui sont faciles à mettre en place en faisant un schéma.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté . On a :
- Relation de Chasles : $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi]$
- $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})\ [2\pi]$

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg(c-a)-\arg(b-a) &=(\vec{u},\overrightarrow{\text{AC}})-(\vec{u},\overrightarrow{\text{AB}})\ [2\pi]\\ &=-(\vec{u},\overrightarrow{\text{AB}})+(\vec{u},\overrightarrow{\text{AC}})\ [2\pi]\\ &=(\overrightarrow{\text{AB}},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{\text{AC}})\ [2\pi]\\ &=(\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}})\ [2\pi]\ \text{(D'après la relation de Chasles)}\end{aligned}$$

**Remarques :**

Soit A, B , C et D quatre points distincts d'affixes respectives $a$, $b$, $c$ et $d$. On a :

- A appartient à la médiatrice de [BC] si et seulement si $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1$
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=0\ [\pi]$, ce qui revient à dire que $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un réel.
- Les droites (AB) et CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui revient à dire que $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

## 2 ) RACINES *n*-ièmes DE L'UNITÉ

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**Définition :**

Soit $n$ un entier naturel non nul.
On appelle racine $n$-ième de l'unité, tout nombre complexe $z$ vérifiant $z^n=1$.

1 est bien sûr toujours une racine $n$-ième de l'unité

**Remarque :**

Les racines $n$-ième de l'unité sont les racines du polynôme $\text{P}(z)=z^n-1$

**Propriété et définition :**

Soit $n$ un entier naturel non nul.
L'équation $z^n=1$ admet exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité distinctes.
Il s'agit des nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$

On note $\text{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité

$\text{U}_n=\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}},k\in\{0,1,2,\dots n-1\}\right\}$

**Preuve :**

Soit $n$ un entier naturel non nul et un complexe $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$ . On a :

$$z^n=1 \Leftrightarrow \left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n=1 \Leftrightarrow r^n\mathrm{e}^{in\theta}=1\,\mathrm{e}^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=0+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{n}\ ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Ainsi tous les nombres complexes $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation $z^n=1$ .

En particulier les nombres complexes $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ sont bien sûr solutions.

Soit K un entier quelconque.
En effectuant la division euclidienne de K par $n$ , on obtient.

$\mathrm{K}=qn+r$ où $r\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ et $q\in\mathbb{Z}$

Ainsi $\mathrm{e}^{i\frac{2\mathrm{K}\pi}{n}}=\mathrm{e}^{i\frac{2(\mathrm{qn+r})\pi}{n}}=\mathrm{e}^{i2q\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{i2r\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{i2r\pi}{n}}$

On retrouve donc une solution de la forme $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ et on en déduit le résultat attendu.

**Propriété :**

Soit $n$ un entier naturel non nul.
Les points images des éléments de $\mathrm{U}_n$ appartiennent au cercle trigonométrique.

Pour $n\geqslant 3$ , les points images des éléments de $\mathrm{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à $n$ sommets.

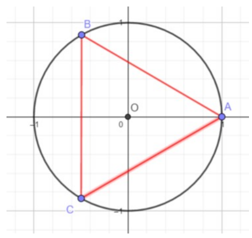
Ce qui est trivial, car ils ont pour module 1.

**Quelques cas particuliers :**

- Les racines 2-ièmes (ou racines carrées) de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^2=1$ .

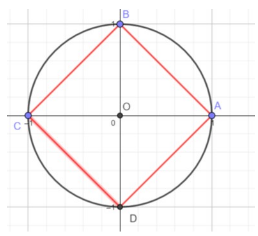
  Dans ce cas on trouve facilement -1 et 1 . On a $\mathrm{U}_2=\{-1;1\}$

- Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^3=1$ .
  Les solutions sont les nombres complexes :
  $\mathrm{e}^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}}=\mathrm{e}^0=1$ , $\mathrm{e}^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}}=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}}=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$
  On note :
  $j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ . On a alors $\bar{j}=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$ . Ainsi $\mathrm{U}_3=\{1,j,\bar{j}\}$

  Les points images des éléments de $\mathrm{U}_3$ sont les sommets du triangle équilatéral ABC.

- Les racines 4-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^4=1$ .

  Dans ce cas on peut factoriser facilement pour déterminer les racines de l'unité :

  $$z^4=1 \Leftrightarrow z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$$

  Ainsi $\mathrm{U}_4=\{1;i;-1;-i\}$

  Les points images des éléments de $\mathrm{U}_4$ sont les sommets du carré ABCD.