## Équations

**Ex 4-1 :** ***Équations du second degré***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous .

1 ) $z^2-2z+2=0$

2 ) $2z^2-2z+3=0$

3 ) $2z^2-2z-3=0$

4 ) $z+\frac{1}{z}=1$

5 ) $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$

6 ) $\frac{z-1}{z+2}=z$

**Ex 4-2 :** ***Équation de degré 3 : factorisation immédiate***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^3-2z^2+z=0$ (E)

**Ex 4-3 :** ***Équation de degré 4 : se ramener à un équation du second degré***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+5z^2+6=0$ (E).

**Ex 4-4 :** ***Avec l'inverse : se ramener à un équation du second degré***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+2=0$ .

**Ex 4-5 :** ***Système***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} z+z'=6 \\ zz'=12 \end{cases}$

**Ex 4-6 :** ***Équation de degré 4 : images des solutions sur un cercle***

Soit $f(z)=z^4-\sqrt{2}z^3-4\sqrt{2}z-16$ .

1 ) Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $f(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$ .

2 ) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$ .

3 ) Soit A, B , C et D les images des solutions de l'équation précédente. Montrer que ces points sont sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

**Ex 4-7 :** ***Somme et produit des racines***

1 ) Soit $z_1$ et $z_2$ les solutions de l'équation à coefficients réels $az^2+bz+c=0$ .

Montrer que $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$ .

2 ) Soit $z_1$ et $z_2$ deux nombres de produit $\mathrm{P}\neq 0$ et de somme S.

Montrer que $z_1$ et $z_2$ sont solutions de l'équation $x^2-\mathrm{S}x+\mathrm{P}=0$ .

3 ) Soit $z_1$ et $z_2$ les solutions de l'équation $2z^2-3z+3=0$ .

Sans résoudre l'équation, calculer le module de $z_1^{-1}+z_2^{-1}$ .

## Factorisation

**Ex 4-8 :** ***Factoriser des polynômes du second degré***

Factoriser les polynômes ci-dessous dans $\mathbb{C}$ :

1 ) $\mathrm{P}(z)=z^2+9$

2 ) $\mathrm{Q}(z)=2z^2+2z+1$

3 ) $R(z)=3z^2+\sqrt{3}z+1$

**Ex 4-9 :** ***Factoriser un polynôme de degré 3***

Soit $P(z)=z^3+6z^2+13z+10$

1 ) Calculer $P(-2)$

2 ) En déduire une factorisation de $P(z)$ dans les réels.

**Ex 4-10:** ***Factoriser un polynôme de degré 3***

Soit $Q(z)=8z^3-1$ . En factorisant, résoudre l'équation $Q(z)=0$ dans $\mathbb{C}$ .

**Ex 4-11 :** ***Factoriser un polynôme de degré 4***

Soit $P(z)=z^4-5z^3+7z^2-5z+6$ .

1 ) Démontrer que pour tout complexe $z$ , on a : $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$

2 ) Déterminer une racine imaginaire pure évidente de P.

3 ) Quelle autre racine la question 1 permet-elle de trouver ?

4 ) Factoriser $P(z)$ dans les réels.

**Ex 4-12 :** ***Factoriser un polynôme de degré 4***

Soit $\mathrm{P}(z)=z^4+6z^3+15z^2+18z$

1 ) Déterminer un réel $a$ tel que $\mathrm{P}(z)=(z^2+3z)^2+a(z^2+3z)$

2 ) Factoriser $\mathrm{P}(z)$ dans les réels et résoudre l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ dans $\mathbb{C}$

**Ex 4-13 :** ***Factoriser un polynôme de degré 4***

Soit $\mathrm{P}(z)=z^4-2z^3+12z^2-8z+32$

1 ) Démontrer que $2i$ et $-2i$ sont des racines de P.

2 ) Justifier que $\mathrm{P}(z)$ peut être factorisé par $z^2+4$ .

3 ) Déterminer l'ensemble des racines de $\mathrm{P}$ dans les complexes.

## Avec des coefficients complexes

**Ex 4-14 :** ***Racines carrées d'un nombre complexe***

Soit un nombre complexe $c=a+ib$ où $a$ et $b$ sont des réels.

On cherche les éventuels nombres complexes vérifiant l'équation $z^2=c$ (E)

1 ) Cas où $b=0$ :

a ) Que peut-on dire de la nature de $c$ ?

b ) Déterminer l'ensemble des nombres complexes solutions de (E).

2 ) Cas où $b\neq 0$ :

On pose $z=x+iy$ où $x$ et $y$ sont des réels.

a ) Montrer que si $x$ et $y$ existent alors : $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$

b ) Montrer que $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$

c ) En déduire $x^2$ et $y^2$ .

d ) Que peut-on dire du signe de $x$ et $y$ si $b>0$ ?

En déduire que (E) a deux solutions et exprimer les solutions en fonction de $a$ et $b$ .

e ) En procédant de la même façon, traiter le cas $b<0$ .

**Ex 4-15 :** ***Application de l'exercice précédent***

1 ) Déterminer les solutions de l'équation $z^2=-2+2i\sqrt{3}$ $(E_1)$

2 ) Soit le polynôme $P(z)=z^4+4z^2+16$

a ) Combien P a-t-il de racines au maximum ?

b ) Résoudre l'équation $Z^2+4Z+16=0$ (E).

c ) En déduire l'ensemble des racines de P.

d ) Justifier que les racines obtenues sont constituées de deux paires de racines conjuguées.

**Ex 4-16 :** ***Factoriser un polynôme de degré 3***

Soit $R(z)=z^3-(1+i)z^2+z-1-i$

1 ) Trouver une racine évidente de R.

2 ) En déduire une factorisation de R dans $\mathbb{C}$ .

**Ex 4-17:** ***Équation de degré 3 à coefficients complexes***

Soit $P(z)=z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i$ .

1 ) Calculer $P(-i)$ .

2 ) Trouver deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $P(z)=(z+i)(z^2+az+b)$ .

3 ) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ .

## Sur tout le chapitre des complexes

**Ex 4-18 :** ***Baccalauréat S – Antilles-Guyane 11 septembre 2014 – ex 4***

Complexes – équations – ensembles de points

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction $f$ qui à tout nombre complexe $z$ associe

$$f(z)=z^2+2z+9.$$

1. Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par la fonction $f$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit $\lambda$ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue $z$.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie

   $$|f(z)-8|=3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit $z$ un nombre complexe, tel que $z=x+iy$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels.
   **a.** Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

   $$x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y).$$

   **b.** On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe $z$ est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites $D_1$ et $D_2$ dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

**Ex 4-19 :** *Baccalauréat S – Asie 16 juin 2015 – ex 4*

Complexes – le nombre j – géométrie

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

**Partie A : propriétés du nombre j**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   **b.** Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   **a.** $j^3 = 1$ ;
   **b.** $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et $j^2$ dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

**Partie B**

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres $a$, $b$, $c$ dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*