Équation du second degré à coefficients réels :

L'équation $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des réels (avec $a\neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta\geqslant 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta<0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme az^2+bz+c peut alors se factoriser sous la forme $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Avec une Ti-spire

$\mathrm{cSolve}(5\cdot z^2-10+15\cdot z\cdot i=0,z)$

$z=-i$ or $z=-2\cdot i$

$\mathrm{cFactor}(5\cdot z^2-10+15\cdot z\cdot i,z)$

$5\cdot(z+i)\cdot(z+2\cdot i)$

Polynôme :

Soit un entier naturel n et a_0, a_1, …, a_n des réels.
Une **fonction polynôme à coefficients réels** (ou **polynôme**), est une fonction souvent notée P définie sur $\mathbb{C}$ qui admet une unique écriture sous la forme :

$$\mathrm{P}(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$$

On admet (ce qui est du bon sens) qu'un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Le **polynôme nul** est le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $\mathrm{P}(z)=0$.

Si P n'est pas le polynôme nul, n est le **degré** de P

On appelle **racine** du polynôme P tout nombre complexe z_0 tel que $\mathrm{P}(z_0)=0$.

Factorisation des polynômes :

Un polynôme P est **factorisable** (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$$

Propriété :

Soit un complexe a et n un entier naturel .
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, z^n-a^n est factorisable par $z-a$ et :

$$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\ldots+a^{n-2}z+a^{n-1})=(z-a)\sum_{k=0}^{n-1}a^k z^{n-1-k}$$

Propriété :

Soit un complexe a .
Un polynôme P est factorisable par $z-a$ si et seulement si a est une racine de P .

Avec une Ti-spire

$\mathrm{cFactor}(z^4+3\cdot z^3-9\cdot z^2+3\cdot z-10,z)$

$(z-2)\cdot(z+5)\cdot(z-i)\cdot(z+i)$

Degré et racines :

Un polynôme non nul P , de degré n , admet au plus n racines.