

LES NOMBRES COMPLEXES : ÉQUATIONS POLYNOMIALES

1) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

Propriété :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans \mathbb{C} deux solutions (éventuellement confondues). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :
 $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Preuve :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$)

On peut écrire $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta < 0$, $-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2 \sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

on obtient alors :
 $a z^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right) = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

2) POLYNÔMES

Définitions :

Soit un entier naturel n et a_0, a_1, \dots, a_n des réels.

Une **fonction polynôme à coefficients réels** (ou **polynôme**), est une fonction souvent notée P définie sur \mathbb{C} qui admet une unique écriture sous la forme :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Le **polynôme nul** est le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $P(z) = 0$.

Si P n'est pas le polynôme nul, n est le **degré** de P

On appelle **racine** du polynôme P tout nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemples :

$P_1(z) = 5$ est un polynôme constant de degré 0.

$P_2(z) = 5z^4 - 2z^2 + 1$ est un polynôme de degré 4.

$P_3(z) = 12z^7$ est un **monôme** de degré 7.

Remarque :

On admet (ce qui est du bon sens) qu'un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

3) FACTORISATION DES POLYNÔMES

Définition :

On dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

Exemple :

$P(z) = 4z^2 - 25$ est factorisable par $2z-5$. En effet $P(z) = (2z-5)(2z+5)$

Propriété :

Soit un complexe a et n un entier naturel .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n - a^n$ est factorisable par $z-a$ et :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = (z-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

Preuve : exigible

Si $a=0$, la propriété est évidente.

Supposons maintenant $a \neq 0$.

Dans les complexes, les propriétés calculatoires sont identiques à celles que nous avons dans \mathbb{R} .

On en déduit donc que la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique reste vraie dans \mathbb{C} .

Pour tout nombre complexe $q \neq 1$, on a donc :

$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow 1-q^n = (1-q)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) \Rightarrow q^n - 1 = (q-1)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$$

En remplaçant q par $\frac{z}{a}$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{a}\right)^n - 1 &= \left(\frac{z}{a} - 1\right) \left(1 + \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}\right) \\ \Rightarrow \frac{z^n}{a^n} - 1 &= \left(\frac{z}{a} - 1\right) \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right) \\ \Rightarrow \frac{z^n - a^n}{a^n} &= \left(\frac{z-a}{a}\right) \left(\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{a^{n-2}z}{a^{n-1}} + \frac{a^{n-3}z^2}{a^{n-1}} + \dots + \frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right) \\ \Rightarrow \frac{z^n - a^n}{a^n} &= \frac{(z-a)(a^{n-1} + a^{n-2}z + a^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1})}{a a^{n-1}} \\ \Rightarrow \frac{z^n - a^n}{a^n} &= \frac{(z-a)(a^{n-1} + a^{n-2}z + a^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1})}{a^n} \\ \Rightarrow z^n - a^n &= (z-a)(a^{n-1} + a^{n-2}z + a^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1}) \end{aligned}$$

Propriété :

Soit un complexe a .

Un polynôme P est factorisable par $z-a$ si et seulement si a est une racine de P .

Preuve : exigible

Si P est factorisable par $z - a$, il est immédiat que a est une racine de P.

Montrons la réciproque :

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n .

On peut donc écrire P sous la forme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ où a_0, a_1, \dots, a_n sont des réels.

On a alors $P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(z) - P(a) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 - (a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0) \\
&= a_n (z^n - a^n) + a_{n-1} (z^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_1 (z - a)
\end{aligned}$$

Or d'après la propriété précédente, il existe des polynômes Q_n, Q_{n-1}, \dots, Q_2 tels que :

$$z^n - a^n = (z - a)Q_n, \quad z^{n-1} - a^{n-1} = (z - a)Q_{n-1}, \quad \dots, \quad z^2 - a^2 = (z - a)Q_2$$

On en déduit que :

$$P(z) - P(a) = a_n (z - a)Q_n + a_{n-1} (z - a)Q_{n-1} + \dots + a_2 (z - a)Q_2 + (z - a) = (z - a)(a_n Q_n + a_{n-1} Q_{n-1} + \dots + a_2 Q_2 + 1)$$

Ainsi $P(z) - P(a)$, c'est à dire $P(z)$ (étant donné que $P(a) = 0$) est bien factorisable par $z - a$

4) DEGRÉ ET RACINES

Propriété :

Un polynôme non nul P, de degré n , admet au plus n racines.

Preuve : exigible

Soit la propriété $H(n)$: «L'équation $P(z) = 0$, où P est un polynôme de degré n a un nombre de solutions inférieur ou égal à n », où $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Toute équation du premier degré du type $az + b = 0$ a au plus une solution. Donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose $H(n)$ vraie pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1 fixé, c'est à dire :

L'équation $P(z) = 0$, où P est un polynôme de degré n a un nombre de solutions inférieur ou égal à n . (HR)

Montrons que $H(n+1)$ est vraie, c'est à dire :

L'équation $P(z) = 0$, où P est un polynôme de degré $n+1$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $n+1$.

- Si P n'a pas de racines, alors l'équation $P(z) = 0$ a bien sûr moins de $n+1$ solutions.

- Si P a au moins une racine complexe a , alors il existe un polynôme Q de degré n tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$. On a alors :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - a = 0 \text{ ou } Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = a \text{ ou } Q(z) = 0$$

D'après (HR), comme Q est de degré n , l'équation $Q(z) = 0$ a au plus n solutions.

On en déduit que l'équation $P(z) = 0$ a au plus $n+1$ solutions et que $H(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : On pourra utiliser en exercice, que dans les complexes un polynôme non nul P, de degré n , admet en fait exactement n racines en tenant compte de l'ordre de multiplicité.