# LES NOMBRES COMPLEXES : ÉQUATIONS POLYNOMIALES

## 1 ) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

**Propriété :**

L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de l'équation. $\Delta$ est un nombre réel.

- si $\Delta \geqslant 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :
$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme $az^2+bz+c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$ .

**Preuve :**

On considère l'équation $az^2+bz+c=0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels (avec $a \neq 0$)

On peut écrire $az^2+bz+c = a\left(z^2+\dfrac{b}{a}z+\dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement .
  Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$ , $-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$ , donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2\sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$
  on obtient alors :
  $$a z^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right) = a\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$
  On en déduit que l'équation $az^2+bz+c=0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
  Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2+bz+c$ sous la forme $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

## 2 ) POLYNÔMES

**Définitions :**

Soit un entier naturel $n$ et $a_0$ , $a_1$ , ..., $a_n$ des réels.
Une **fonction polynôme à coefficients réels** ( ou **polynôme**), est une fonction souvent notée $\mathrm{P}$ définie sur $\mathbb{C}$ qui admet une unique écriture sous la forme :
$$\mathrm{P}(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Le **polynôme nul** est le polynôme P défini pour tout nombre complexe $z$ par $\mathrm{P}(z)=0$ .

Si P n'est pas le polynôme nul, $n$ est le **degré** de P

On appelle **racine** du polynôme P tout nombre complexe $z_0$ tel que $\mathrm{P}(z_0)=0$ .

**Exemples :**

$\mathrm{P}_1(z)=5$ est un polynôme constant de degré 0.

$\mathrm{P}_2(z)=5z^4-2z^2+1$ est un polynôme de degré 4.

$\mathrm{P}_3(z)=12z^7$ est un **monôme** de degré 7.

**Remarque :**

On admet ( ce qui est du bon sens) qu'un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

## 3 ) FACTORISATION DES POLYNÔMES

**Définition :**

On dit qu'un polynôme P est factorisable ( ou divisible ) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$ :

$$\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$$

**Exemple :**

$\mathrm{P}(z)=4z^2-25$ est factorisable par $2z-5$ . En effet $\mathrm{P}(z)=(2z-5)(2z+5)$

**Propriété :**

Soit un complexe $a$ et $n$ un entier naturel .
Pour tout $z\in\mathbb{C}$ , $z^n-a^n$ est factorisable par $z-a$ et :

$$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+a\,z^{n-2}+a^2z^{n-3}+\ldots+a^{n-2}z+a^{n-1})=(z-a)\sum_{k=0}^{n-1}a^k z^{n-1-k}$$

**Preuve :** ***exigible***

Si $a=0$ , la propriété est évidente.

Supposons maintenant $a\neq 0$ .

Dans les complexes, les propriétés calculatoires sont identiques à celles que nous avons dans $\mathbb{R}$ .

On en déduit donc que la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique reste vraie dans $\mathbb{C}$ .

Pour tout nombre complexe $q$ , on a donc :

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q} \quad\Rightarrow\quad 1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) \quad\Rightarrow\quad q^n-1=(q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$$

En remplaçant $q\neq 1$ par $\frac{z}{a}$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\left(\frac{z}{a}\right)^n-1=\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n}{a^n}-1=\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n-a^n}{a^n}=\left(\frac{z-a}{a}\right)\left(\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{a^{n-2}z}{a^{n-1}}+\frac{a^{n-3}z^2}{a^{n-1}}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n-a^n}{a^n}=\frac{(z-a)(a^{n-1}+a^{n-2}z+a^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1})}{a\,a^{n-1}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z^n-a^n}{a^n}=\frac{(z-a)(a^{n-1}+a^{n-2}z+a^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1})}{a^n}$$

$$\Rightarrow\quad z^n-a^n=(z-a)(a^{n-1}+a^{n-2}z+a^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1})$$

**Propriété :**

Soit un complexe $a$ .
Un polynôme P est factorisable par $z-a$ si et seulement si $a$ est une racine de P .

**Preuve :** *exigible*

Si P est factorisable par $z-a$ , il est immédiat que $a$ est une racine de $P$ .

Montrons la réciproque :

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n$ .

On peut donc écrire P sous la forme $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$ où $a_0$ , $a_1$ , …, $a_n$ sont des réels.

On a alors $P(a)=a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+\ldots+a_1 a+a_0$ et on peut écrire :

$$P(z)-P(a)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0-\left(a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+\ldots+a_1 a+a_0\right)$$

$$=a_n\left(z^n-a^n\right)+a_{n-1}\left(z^{n-1}-a^{n-1}\right)+\ldots+a_1(z-a)$$

Or d'après la propriété précédente, il existe des polynômes $Q_n$ , $Q_{n-1}$ , …, $Q_2$ tels que :

$$z^n-a^n=(z-a)Q_n\ ,\ z^{n-1}-a^{n-1}=(z-a)Q_{n-1}\ ,\ \ldots\ ,\ z^2-a^2=(z-a)Q_2$$

On en déduit que :

$$P(z)-P(a)=a_n(z-a)Q_n+a_{n-1}(z-a)Q_{n-1}+\ldots+a_2(z-a)Q_2+(z-a)=(z-a)\left(a_n Q_n+a_{n-1}Q_{n-1}+\ldots+a_2 Q_2+1\right)$$

Ainsi $P(z)-P(a)$ , c'est à dire $P(z)$ (étant donné que $P(a)=0$ ) est bien factorisable par $z-a$

## 4 ) DEGRÉ ET RACINES

**Propriété :**

Un polynôme non nul P , de degré $n$ , admet au plus $n$ racines.

**Preuve :** *exigible*

Soit la propriété $H(n)$ : «L'équation $P(z)=0$ , où P est un polynôme de degré $n$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $n$ », où $n\in\mathbb{N}^*$

Montrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Toute équation du premier degré du type $az+b=0$ a au plus une solution . Donc $H(1)$ est vraie.

**Hérédité :**

On suppose $H(n)$ vraie pour un entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 fixé , c'est à dire :

L'équation $P(z)=0$ , où P est un polynôme de degré $n$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $n$ . (HR)

Montrons que $H(n+1)$ est vraie, c'est à dire :

L'équation $P(z)=0$ , où P est un polynôme de degré $n+1$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $n+1$ .

- Si P n'a pas de racines, alors l'équation $P(z)=0$ a bien sûr moins de $n+1$ solutions.

- Si P a au moins une racine complexe $a$ , alors il existe un polynôme Q de degré $n$ tel que $P(z)=(z-a)Q(z)$ . On a alors :

$$P(z)=0 \iff z-a=0 \text{ ou } Q(z)=0 \iff z=a \text{ ou } Q(z)=0$$

D'après (HR), comme Q est de degré $n$ , l'équation $Q(z)=0$ a au plus $n$ solutions.

On en déduit que l'équation $P(z)=0$ a au plus $n+1$ solutions et que $H(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** $H(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ .

**Remarque :** On pourra utiliser en exercice, que dans les complexes un polynôme non nul P , de degré $n$ , admet en fait exactement $n$ racines en tenant compte de l'ordre de multiplicité.