Trigonométrie

Ex 1 : ***En fonction de*** $\cos \boldsymbol{x}$ ***et*** $\sin \boldsymbol{x}$

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)$

d) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}-x\right)$

Ex 2 : $\cos(\boldsymbol{2a})$, $\sin(\boldsymbol{2a})$

1) Peut-on avoir :

a) $\cos(2a)=2\cos(a)$

b) $\sin(2a)=2\sin(a)$

2) On donne $\cos a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (où $a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$).

En calculant $\cos(2a)$, trouver a .

Ex 3 : ***Équations***

Trouver les solutions réelles des équations ci-dessous :

a) $\sin(2x)=\cos x$

b) $3\cos(2x)+2\sin^2 x=0$

Ex 4 : *Simplification*

Simplifier $\mathrm{P}=\cos x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)$

Ex 5 : *Valeur exacte de* $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ***et*** $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

a) Exprimer $\frac{7\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$.

b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

La notation exponentielle

Ex 6 : *Mettre sous forme exponentielle*

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :

$z_1=-\sqrt{3}+i$

$z_2=-2-2i$

$z_3=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

$z_4=3-i\sqrt{3}$

$z_5=4+4i$

En déduire les formes exponentielles de $z_1 z_2$, de $z_3 z_4 z_5$ et de $\dfrac{z_2}{z_3}$.

Ex 7 : ***Mettre sous forme algébrique***

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes :

$z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}}$

$z_2 = \mathrm{e}^{i\pi}$

$z_3 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$

Ex 8 : ***Mettre sous forme exponentielle***

Les questions sont indépendantes.

1) On pose $z = 3 - i\sqrt{3}$

a) Déterminer l'écriture exponentielle de z .

b) En déduire les écritures exponentielles de :

$z_1 = 3z$

$z_2 = iz$

$z_3 = -2z$

$z_4 = -4iz$

2) Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ (où $r > 0$).

Déterminer l'écriture exponentielle de :

$-z$

iz

$-iz$

$\overline{z}$

$-i\overline{z}$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'écriture exponentielle des nombres suivants :

$\cos a - i \sin a$

$\sin a + i \cos a$

$-\sin a + i \cos a$

Ex 9 : Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Soit $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1+i$.

1) Déterminer les formes exponentielles de z_1 et de z_2 .

2) En déduire celle de $Z=z_1 z_2$

3) Déterminer la forme algébrique de Z.

4) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Ex 10 : ***Retrouver des formules de trigonométrie***

En utilisant la forme exponentielle, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Ex 11 : ***Un calcul pas si compliqué ...***

Déterminer le module et un argument de $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^4$.

Formules d'Euler et formule de Moivre

Ex 12 : ***Reconnaître les formules d'Euler***

Soit x un nombre réel.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous :

$a=3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$

$b=e^{-ix}-e^{ix}$

$c=e^{i7x}+e^{-i7x}$

$d=e^{i2x}-e^{-2ix}$

<u>Ex 13 :</u> ***Simplification d'écriture***

Simplifier l'écriture du nombre suivant : $b=\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2$

<u>Ex 14 :</u> ***Utilisation du demi-angle : un grand classique***

Soit $\theta\in]0;2\pi[$.

1) En factorisant par $e^{i\frac{\theta}{2}}$, déterminer le module et un argument de $a=1+e^{i\theta}$.

2) Faire de même pour $b=1-e^{i\theta}$.

3) Montrer que $\frac{a}{b}$ est un imaginaire pur.

Ex 15 : ***Linéarisation et formules d'Euler :*** $\cos^5 x$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Linéariser $\cos^n x$, c'est l'écrire en fonction de sommes de $\cos(px)$ où $p \in \mathbb{N}$.

1) Développer $(a+b)^5$.

2) En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$\cos^5 x = \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)$$

3) En utilisant à nouveau les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\cos^5 x$.

La linéarisation est un outil important pour déterminer des primitives.

Ex 16 : ***Linéarisation et formules d'Euler :*** $\sin^4 x$

1) Développer $(a+b)^4$ et en déduire le développement de $(a-b)^4$.

2) En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right)$$

3) En utilisant à nouveau les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\sin^4 x$.

Ex 17 : ***Linéarisation et formules d'Euler :*** $\sin^3 x$

Linéariser $\sin^3 x$. (l'écrire en fonction de sommes de $\sin(px)$ où $p\in\mathbb{N}$)

Ex 18 : ***Déterminer des sommes trigonométriques très connues***

1) Montrer que $\cos(n\theta)=\Re e\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right)$ et $\sin(n\theta)=\Im m\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right)$

2) On pose $C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$

Montrer en utilisant la question 1) et les formules d'Euler que :

$$C_n=\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n=\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Avec des suites

Ex 19 : ***D'après Baccalauréat S – Pondichéry 8 avril 2014 – ex 3***

Complexes – suite géométrique – algorithme – géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$.

2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c. Que dire de la longueur $\text{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

```
from math import sqrt
R=1
n=0
p=float(input("p="))
while (R>p):
    n=n+1
    R=sqrt(3)/2*R
print(n)
```

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$?

b. Pour $P = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. **a.** Démontrer que le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.