

Formules d'addition :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Formules de duplication :

$\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\bullet \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\bullet \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ = 2 \cos^2 a - 1 \\ = 1 - 2 \sin^2 a$$

Formules de linéarisation :

$\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\bullet \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\bullet \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Notation exponentielle d'un nombre complexe :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+$, on a $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$
 Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}$$

Propriétés :

• La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

En effet, on a d'une part : $e^{i(\theta + \theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$

Et d'autre part :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \dots = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

• La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet, en procédant de la même façon, de retrouver les **formules de duplication** :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ , on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Il est souvent utile de retenir les formules ainsi :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

Formule de Moivre :

Pour tout réel θ , et pour tout entier naturel n on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$