

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

1) TRIGONOMÉTRIE

A) FORMULES D'ADDITION

Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad ; \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Preuve :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.

Les coordonnées de A et de B sont respectivement $(\cos a; \sin a)$ et $(\cos b; \sin b)$.

D'autre part, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b - a$$

(la propriété utilisée est la relation de Chasles)

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

- avec les coordonnées : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- en utilisant $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b - a) = OA \times OB \times \cos(a - b)$

Ainsi $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Pour les trois autres formules, il suffit d'appliquer $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ après les modifications suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) \dots$$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \dots$$

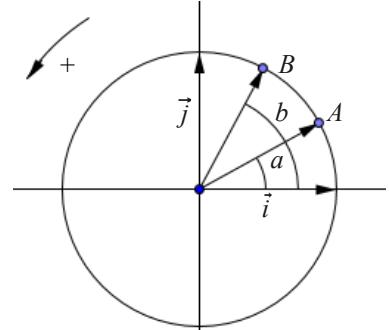
$$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \dots$$

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$\bullet \quad \cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\bullet \quad \sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

FORMULES DE DUPLICATION

Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
 $= 2 \cos^2 a - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 a$

FORMULES DE LINÉARISATION

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant $b=a$, dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.

2) NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres. C'est-à-dire que la fonction $f : \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ est telle que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.

Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta} \quad , n \in \mathbb{Z} \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

En effet, on a d'une part : $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i \sin(\theta+\theta')$

Et d'autre part : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \dots = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(\theta+\theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta+\theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet, en procédant de la même façon, de retrouver les **formules de duplication** :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

3) FORMULES DE MOIVRE ET D'EULER

On montre facilement :

Propriété : FORMULES D'EULER

Pour tout réel θ , on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque :

Il est souvent utile de retenir les formules ainsi : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$

Propriété : FORMULE DE MOIVRE

Pour tout réel θ , et pour tout entier naturel n on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$