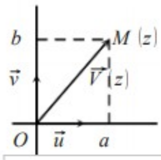
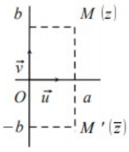



Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

## Représentation géométrique :

Si M est le point d'affixe z , le point M ' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

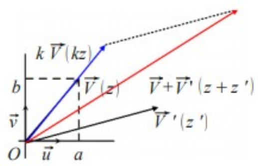



On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

Au point $M$ de coordonnées $(a ; b)$ , on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$ .
$z=a+bi$ est **l'affixe** de $M$ et $M(a ; b)$ est **l'image ponctuelle** de $z=a+bi$ .

Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a ; b)$ , on peut associer le nombre complexe $z=a+bi$ .
$z=a+bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ et $\vec{V}(a ; b)$ est **l'image vectorielle** de $z=a+bi$ .

## Propriétés :

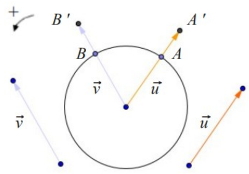



Si $M$ a pour affixe $z=a+bi$ et si $M'$ a pour affixe $z'=a'+b'i$ , avec $a, b, a', b'$ réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z=(a'-a)+(b'-b)i$
- $OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{a^2+b^2}$
- $MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$
- le milieu $I$ de $[MM']$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z+z'}{2}$
- Si $\vec{V}$ a pour affixe $z$ et $\vec{V}'$ pour affixe $z'$, alors $\vec{V}+\vec{V}'$ a pour affixe $z+z'$.
- Si $k$ est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe $kz$.

## Angle orienté :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, $O$ un point quelconque et $C$ le cercle trigonométrique de centre $O$ .




On appelle **mesures de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ tous les réels de la forme :

- $l+2k\pi$ où $l$ est la longueur de l'arc parcouru de $A$ vers $B$ dans le sens direct et où $k \in \mathbb{N}$
- $-l'+2k\pi$ où $l'$ est la longueur de l'arc parcouru de $A$ vers $B$ dans le sens indirect et où $k' \in \mathbb{N}$ .

**Remarque :** On peut exprimer toutes les mesures sous la forme $l+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ .

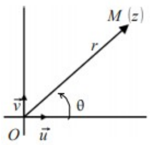
**Les mesures en radian** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

Il en résulte que si $x$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ , alors les autres mesures sont de la forme $x+2k\pi$ , $k\in\mathbb{Z}$ .
On dit que les angles orientés sont définis modulo $2\pi$ .

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ .
On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ .

$(r, \theta)$ est un couple de **coordonnées polaires**

## Forme trigonométrique :




$r=\sqrt{a^2+b^2}$
$a=r\cos\theta$
$b=r\sin\theta$

Tout nombre complexe non nul $z=a+ib$ peut-être écrit sous la forme :

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) , \quad \text{avec } \theta\in\mathbb{R} \text{ et } r\in\mathbb{R}_+^*$$

On dit que $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de $z$.

## Propriété :

Si deux nombres complexes $z$ et $z'$ sont écrits sous forme trigonométrique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$, on a :

$$z=z' \Leftrightarrow r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta' [2\pi] \end{cases}$$

## Module :

On appelle **module** de $z$ le nombre réel positif $r=OM=\sqrt{a^2+b^2}$ . On note $r=|z|$ .

## Propriétés :

- Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe $z$ , on a $\|\vec{V}\|=|z|$
- Soit $A$ et $B$ deux points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ , on a $AB=|z_B-z_A|$
- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $|-z|=|z|$
- $|\bar{z}|=|z|$
- $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$ et $|z^n|=|z|^n$ ( $n\in\mathbb{N}$ )
- si $z\neq0$ $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$
- si $z'\neq0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\bar{z}=|z|^2$ ( on retrouve $z\bar{z}\in\mathbb{R}^+$ )
- si $z\neq0$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

## L'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$

**L'ensemble des nombres complexes de module 1** est noté $\mathbb{U}$

Dans le plan complexe, cet ensemble est le cercle trigonométrique.

## Propriétés :

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes appartenant à l'ensemble $\mathbb{U}$ . On a :

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$ ( $z\neq0$ )
- $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{U}$ ( $z\neq0$ )

## Argument :

$\theta$ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près $(k\in\mathbb{Z})$ c'est-à-dire modulo $[2\pi]$ .

On appelle **argument** de $z$ (avec $z$ **non nul**) tout nombre réel $\theta$ tel que $\theta=(\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ . On note $\theta=\arg(z)$

## Propriétés :

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\theta$ et $\theta'$ . On a :

- $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$ — $\arg(zz')=\arg z+\arg z' \ [2\pi]$
- $\dfrac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(\theta)+i\sin(-\theta)$ — $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg z \ [2\pi]$
- $\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$ — $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z' \ [2\pi]$
- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ — $\arg(z^n)=n\arg z \ [2\pi]$
- $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ — $\arg(\bar{z})=-\arg z \ [2\pi]$
- $-(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$ — $\arg(-z)=\arg z+\pi \ [2\pi]$
- $\bar{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ et $-z=r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$