Suites de matrices

Ex 11-1 :

On considère la suite de matrices définie par $U_0=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=A\,U_n$ où $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer U_1 et U_2

2) Exprimer $U_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ en fonction de n et A, puis déterminer la matrice U_{10} avec la calculatrice.

Ex 11-2 : ***Calculer les termes d'une suite en utilisant l'écriture matricielle de la relation de récurrence***

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par :

$a_{n+1}=2a_n-b_n$ et $a_2=3$

$b_{n+1}=-a_n+2b_n$ et $b_2=5$

On définit pour tout entier naturel n , la matrice $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice A, telle que $U_{n+1}=A\,U_n$

2) Calculer a_0 et b_0

3) Calculer a_6 et b_6

Ex 11-3 : ***Calculer les termes d'une suite en utilisant l'écriture matricielle de la relation de récurrence***

On considère la suite de nombres réels (a_n) telle que pour tout entier naturel n non nul : $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$

1) Traduite la relation de récurrence par une égalité matricielle du type $U_{n+1}=A\,U_n$

2) On donne $a_0=2$ et $a_1=5$. Calculer a_4 et a_5 .

Ex 11-4 : ***Vrai ou faux***

1) La suite de matrices colonnes (U_n) définie par $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} e^{-n} \\ 1 \\ \overline{2^n} \end{pmatrix}$ est convergente.

2) La suite de matrices colonnes (V_n) définie par $\mathrm{V}_n=\begin{pmatrix} 0{,}2^n-1 \\ 3^n \end{pmatrix}$ est convergente.

3) La matrice $\mathrm{U}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un état stable de la suite de matrices colonnes $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$ où $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Ex 11-5 : ***Mettre sous la forme*** $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n+\mathrm{B}$

Traduire les relations de récurrence des suites ci-dessous par une égalité matricielle du type $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n+\mathrm{B}$

1) $a_0=1$, $b_0=2$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n-2b_n+2 \\ b_{n+1}=-a_n+2b_n-7 \end{cases}$$

2) $a_0=-1$, $a_1=1$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 0$:

$$a_{n+2}=-a_n+5a_{n+1}-2$$

Ex 11-6 : $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$ ***et état stable***

On considère la suite de matrices (U_n) définie par $\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$ où $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la suite diverge.

2) La suite (U_n) a-t-elle un état stable ?

Ex 11-7 :

Soit la suite de matrices (U_n) , définie pour tout entier naturel n par $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n+\mathrm{B}$ où $\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice U telle que $U=AU+B$.

2) On pose $V_n=U_n-U$. Montrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1}=A\,V_n$.
En déduire l'expression de V_n en fonction de n .

3) Avec la calculatrice, déterminer A^2 , A^3 , A^4 et A^5 .
Conjecturer une expression de A^n

4) Démontrer la conjecture précédente pour tout entier naturel n non nul.

5) En déduire l'expression de U_n en fonction de n .

6) On admet que $\lim_{n\to+\infty} n\,0{,}5^n=0$. Étudier la convergence de la suite (U_n) .

Ex 11-8 : ***Avec la calculatrice***

On donne $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}3\end{pmatrix}$

1) On considère la suite de matrices colonne (U_n) telles que pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=A\,U_n+B$.

Déterminer la matrice U telle que $U=AU+B$

2) Conjecturer le comportement asymptotique de A^n

3) Quelle conjecture peut-on alors faire sur le comportement asymptotique de la suite (U_n) ?

Ex 11-9 :

On considère la suite de matrices colonne (U_n) telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$U_{n+1}=A\,U_n+B$ et $U_0=\begin{pmatrix}\frac{110}{7}\\ \frac{-16}{7}\end{pmatrix}$

où $A=\begin{pmatrix}\frac{13}{30} & -\frac{2}{15}\\ -\frac{1}{15} & \frac{11}{30}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice U telle que $U=AU+B$

2) Soit $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0,3 & 0\\ 0 & 0,5\end{pmatrix}$.

Vérifier que $A=P^{-1}D\,P$

3) a) Montrer que $A^n=P^{-1}D^nP$.

b) En déduire les coefficients de A^n .

4) On pose $V_n = U_n - U$. Montrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = A V_n$.
En déduire l'expression de V_n en fonction de n , puis l'expression de U_n en fonction de n .

5) Étudier la convergence de la suite (U_n) .

Ex 11-10 : *Baccalauréat S – Liban 31 mai 2019 – ex 4*

$U_{n+1} = A U_n + B$ - matrices diagonales - récurrence

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.
Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.
Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

— dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
— ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
— enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.
b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
c. Calculer PDP.
d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

4. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.

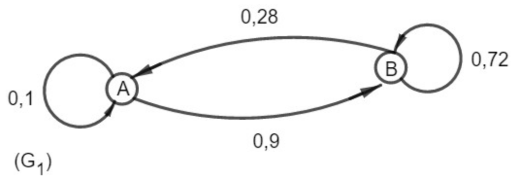
a. Montrer que tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
b. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

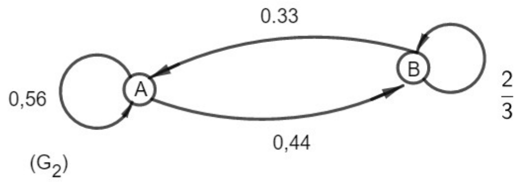
5. **a.** Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
b. Déterminer la limite de la suite (a_n).
c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

Graphes probabilistes

Ex 11-11 : ***Graphes probabilistes ?***

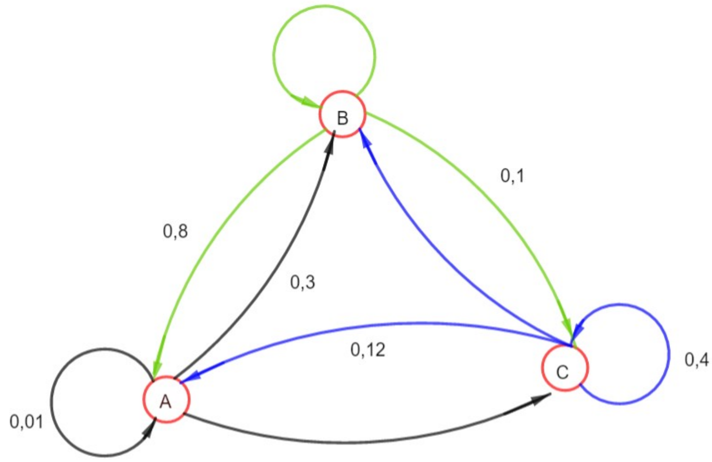
Les graphes ci-dessous sont-ils des graphes probabilistes ?
Si oui, donner la matrice de transition associée.





Ex 11-12 : ***Compléter un graphe probabiliste***

Compléter le graphe probabiliste ci-dessous et donné la matrice de transition associée .



Ex 11-13 :

Une grenouille saute aléatoirement plusieurs fois par heure sur trois rochers . A chaque étape :

- Si elle est sur le rocher A, elle choisit de manière équiprobable, soit de rester en A, soit de sauter vers le rocher B ou vers le rocher C.

- Si elle est sur le rocher B, elle choisit de manière équiprobable de sauter sur le rocher A ou sur le rocher C.

- Si elle est sur le rocher C, elle saute sur le rocher A.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position de la grenouille à l'étape n .
Au début, pour $n=0$, la grenouille est sur le rocher A.

1) Donner la distribution initiale du système.

2) En utilisant un arbre pondéré, donner la distribution du système après deux étapes.

3) Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov et donner le graphe probabiliste et la matrice associée.

4) Quelle est la probabilité que la grenouille se retrouve à nouveau sur le rocher A au bout de 5 étapes ?

5) La grenouille (de compétition) , saute sans jamais s'arrêter .
Conjecturer grâce à la calculatrice, la probabilité qu'elle soit sur le rocher A au bout d'une semaine ?

Ex 11-14 :

Un chimpanzé navigue sur un site internet comptant trois pages.
Sur chacune des pages, il y a des bananes représentant des liens ramenant sur les autres pages.
- Sur la page 1, il y a deux bananes, l'une menant à la page 2 et l'autre à la page 3.
- Sur la page 2, il y a quatre bananes, trois menant à la page 3 et une à la page 1.
- Sur la page 3, il y a une banane menant à la page 2.

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et donner la matrice de transition P associée.

2) Le chimpanzé est sur la page 2 et clique 15 fois . Sur quelle page a-t-il le plus de chance de se retrouver ?

Déterminer une distribution invariante

Ex 11-15 :

La matrice $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

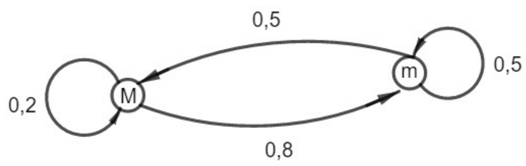
1) Représenter le graphe associé.

2) Déterminer la distribution invariante de cette chaîne.

3) Déterminer le comportement asymptotique de cette chaîne.

Ex 11-16 :

Un ordinateur est programmé pour afficher successivement des lettres qui sont soit des lettres majuscules (M) soit des lettres minuscules (m) selon le graphe probabiliste ci-dessous :



1) On suppose que la première lettre est une majuscule . Calculer la probabilité que la 10-ième lettre soit aussi une majuscule.

2) Déterminer la distribution invariante de ce système, puis interpréter le résultat.

Ex 11-17 :

La matrice $P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale $\pi_0=(1 \quad 0 \quad 0)$

1) Représenter cette chaîne par un graphe pondéré.

2) Calculer la distribution après 5 transitions.

3) Avec la calculatrice, conjecturer le comportement asymptotique de cette chaîne de Markov.

4) Conjecturer que la suite des distributions (π_n) converge et donner sa limite.

Ex 11-18 :

Un chat, au cours de la journée se déplace pour dormir entre le lit (A), le canapé (B) et le tapis (C).
On note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives que le chat soit en A, en B et en C après n déplacements.

À l'étape $n=0$, il dort tranquillement sur le lit.

Une étude sur le comportement de ce chat a permis d'établir que :

$$\begin{cases} a_{n+1}=0,3a_n+0,3b_n+0,3c_n \\ b_{n+1}=0,2a_n+0,5b_n+0,3c_n \\ c_{n+1}=0,5a_n+0,2b_n+0,4c_n \end{cases}$$

On note $\pi_n=(a_n \, b_n \, c_n)$

1) Écrire la matrice P, telle que, pour tout entier naturel n , $\pi_{n+1}=\pi_n P$

2) Calculer la probabilité pour que le chat dorme sur le tapis après 4 étapes.

3) Justifier que la suite de matrices (π_n) converge vers une matrice $\pi=(a \quad b \quad c)$

4) Démontrer que les nombres a , b et c vérifient le système suivant :

$$(S):\begin{cases} a+b+c=1 \\ -0{,}7\,a+0{,}3\,b+0{,}3\,c=0 \\ 0{,}5\,a+0{,}2\,b-0{,}6\,c=0 \end{cases}$$

5) Résoudre ce système à l'aide d'un calcul matriciel.

6) En déduire l'endroit où le chat a le plus de chance de dormir à long terme.