Suites de Matrices :

On définit de la même manière **une suite de matrices lignes**.

- On appelle **suite de matrices colonnes** (U_n), des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.
- On dit que (U_n) **converge** si et seulement si tous ses éléments convergent. La limite de (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme de (U_n).

Propriété :

Si A est une matrice carrée d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes telles que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$$

Propriété et définition :

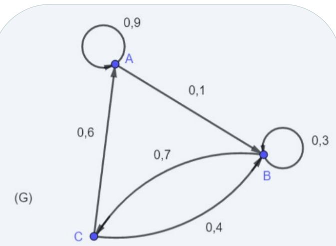
Soit A une matrice carrée d'ordre $p \in \mathbb{N}$, B une matrice colonne à p lignes et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes, telles que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\,\mathrm{U}_n + \mathrm{B}$.

Si la suite (U_n) converge alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant $\mathrm{U} = \mathrm{AU} + \mathrm{B}$.

On dit que la matrice U est **l'état stable** de la suite (U_n)

Graphe probabiliste :

- **Un graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
- **Le poids** d'une chaîne est la somme des coefficients affectés aux arêtes qui composent la chaîne.
- **Un graphe probabiliste** est un **graphe orienté pondéré** où tous les poids sont compris entre 0 et 1et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.



(G) est un graphe prababiliste à trois états.

La matrice de transition du graphe (G) est

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

La somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

Matrice de transition :

Si les sommets sont des lettres, on numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique.

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle **une matrice de transition.**

C'est une matrice carrée p telle que le terme de la i-ème ligne et j-ième colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe, 0 sinon.

Chaîne de Markov :

Soit une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

La loi de probabilité de X_0 (étape 0) s'appelle **la distribution initiale du système**.

La loi de probabilité de X_n (étape n) s'appelle **la distribution après *n* transitions**.

Si, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n, on dit que la suite (X_n) est une **chaîne de Markov**.

On associe à une chaîne de Markov un graphe probabiliste tel que les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.

Représentation à l'aide d'une suite de matrices :

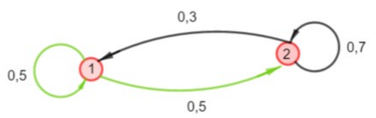
Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

Soit trois entiers naturels n, i et j tels que $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ (respectivement $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$).

La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i-ème et j-ième colonne de la matrice P^n.

Exemple :

On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.



$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Define $p = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ Terminé

p^4 $\begin{bmatrix} 0.376 & 0.624 \\ 0.3744 & 0.6256 \end{bmatrix}$

La probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 4 étapes 0,624

Chaîne de Markov : étude asymptotique :

π_0 représente la distribution initiale et π_n la distribution après n transitions.

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement 3) colonnes dont le terme de la j-ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égalé à j, c'est à dire :

$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) & \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 2) \end{pmatrix}$ (respectivement $\pi_n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) & \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 2) & \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 3) \end{pmatrix}$)

Propriété :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{P}$ et $\pi_n = \pi_0 \mathrm{P}^n$.

Propriété : distribution invariante du système

P^n ne contient pas de 0 signifie qu'en n étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre état.

S'il existe un entier naturel n tel que P^n ne contient pas de 0 alors la suite (π_n) converge vers la matrice π vérifiant $\pi = \pi\,\mathrm{P}$ et cette limite ne dépend pas de π_0.

La matrice π représente **la distribution invariante du système**.