

# MATRICES - QUELQUES UTILISATIONS

## 1) SUITES DE MATRICES

### Définitions :

Soit un entier naturel  $n$ .

- On appelle **suite de matrices colonnes**  $(U_n)$ , des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.
- On dit que  $(U_n)$  **converge** si et seulement si tous ses éléments convergent. La limite de  $(U_n)$  est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme de  $(U_n)$ .

On définit de la même manière **une suite de matrices lignes**.

Dans les autres cas, on dit que la suite est divergente.

### Exemple :

- La suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = \begin{pmatrix} n^3 \\ 2-n \end{pmatrix}$  est une suite de matrices dont les coefficients sont les suites numériques  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_n = n^3$  et  $b_n = 2-n$ .

La suite  $(U_n)$  est divergente car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2-n = -\infty$

- La suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ 2+e^{-n} \end{pmatrix}$  est convergente. Sa limite est la matrice  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

### Propriété :

Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $p \in \mathbb{N}$  et  $(U_n)$  une suite de matrices colonnes à  $p$  lignes telles que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = A U_n$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$$

### Preuve :

Soit la propriété  $P(n)$  : "  $U_n = A^n U_0$  ", pour  $n \in \mathbb{N}$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Initialisation :

$A^0 = I_p$ ,  $P(0)$  est donc vraie.

#### Héritéité :

Supposons  $P(n)$  vraie pour un entier  $n \in \mathbb{N}$  fixé, c'est à dire  $U_n = A^n U_0$  (HR)

Montrons que la propriété  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire  $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$

On a  $U_{n+1} = A U_n = A (A^n U_0)$  (d'après HR)

Ainsi  $U_{n+1} = (A A^n) U_0 = A^{n+1} U_0$

On a donc démontré que  $P(n+1)$  est vraie.

#### Conclusion :

$P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , c'est à dire :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$

### Exemple :

Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 2$  et  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n - 2b_n \end{cases}$ , pour tout entier naturel  $n$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ .

On a  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $U_{n+1} = A U_n$ .

On en déduit que  $U_7 = A^7 U_0 = \begin{pmatrix} 171 \\ -531 \end{pmatrix}$

Define  $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  Terminé  
Define  $u0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  Terminé  
 $a^7 \cdot u0$   $\begin{bmatrix} 171 \\ -531 \end{bmatrix}$

## Propriété et définition : admise

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p \in \mathbb{N}$ ,  $B$  une matrice colonne à  $p$  lignes et  $(U_n)$  une suite de matrices colonnes à  $p$  lignes, telles que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = A U_n + B$ .

Si la suite  $(U_n)$  converge alors sa limite  $U$  est une matrice colonne vérifiant  $U = AU + B$ .

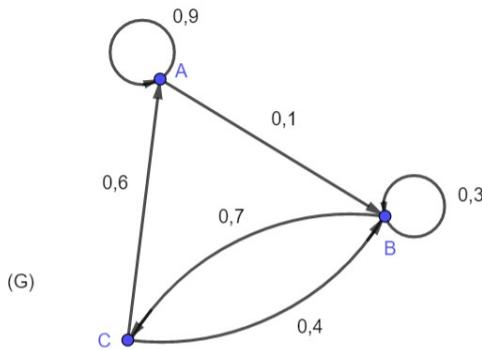
On dit que la matrice  $U$  est **l'état stable** de la suite  $(U_n)$

## 2) CHAÎNES DE MARKOV

### Définition :

- **Un graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
- **Le poids** d'une chaîne est la somme des coefficients affectés aux arêtes qui composent la chaîne.
- **Un graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1 et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

**Exemple :** (G) est un graphe probabiliste à trois états.



### Définition :

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant  $p$  sommets s'appelle **une matrice de transition**.

C'est une matrice carrée d'ordre  $p$  telle que le terme de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet  $i$  au sommet  $j$  si elle existe, 0 sinon.

Si les sommets sont des lettres, on numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique.

**Exemple :** La matrice de transition du graphe (G) de l'exemple précédent est

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

### Définition :

Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n)$  permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

La loi de probabilité de  $X_0$  (étape 0) s'appelle **la distribution initiale du système**.

La loi de probabilité de  $X_n$  (étape  $n$ ) s'appelle **la distribution après  $n$  transitions**.

Si, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de  $n$ , on dit que la suite  $(X_n)$  est une **chaîne de Markov**.

On associe à une chaîne de Markov un graphe probabiliste tel que les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.

### 3) CHAÎNES DE MARKOV : REPRÉSENTATION À L'AIDE D'UNE SUITE DE MATRICES

#### Propriété :

Soit une chaîne de Markov à 2 ( respectivement 3 ) états et  $P$  la matrice de transition associée.

Soit trois entiers naturels  $n$ ,  $i$  et  $j$  tels que  $n \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq 2$  et  $1 \leq j \leq 2$  ( respectivement  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  ).

La probabilité de passer de l'état  $i$  à l'état  $j$  en  $n$  étapes est égale au terme de la  $i$ -ème et  $j$ -ième colonne de la matrice  $P^n$ .

#### Preuve : Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états.

Soit la propriété  $Q(n)$  : " $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$ ", pour  $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### Initialisation :

Pour  $n=1$ , on a par définition de la matrice de transition  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$  où  $p_{ij} = P_{X_0=i}(X_1=j)$  ( avec  $i \in \{1;2\}$  et  $j \in \{1;2\}$  )  
 $Q(1)$  est donc vraie.

#### Héritéité :

Supposons  $Q(n)$  vraie pour un entier  $n \in \mathbb{N}$  fixé, c'est à dire  $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$  (HR)

Montrons que la propriété  $Q(n+1)$  est vraie, c'est à dire  $P^{n+1} = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}$

Soit deux entiers naturels  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i \leq 2$  et  $1 \leq j \leq 2$ .

Dans un premier temps, on calcule la probabilité de passer de l'état à  $i$  à l'état  $j$  en  $n+1$  transitions.

(Pour cette démonstration, on utilise le fait que  $P_{X_0=i}$  est une probabilité)

$$\begin{aligned} P_{X_0=i}(X_{n+1}=j) &= P_{X_0=i}((X_{n+1}=j) \cap (X_n=1)) + P_{X_0=i}((X_{n+1}=j) \cap (X_n=2)) \quad (\text{D'après la formule des probabilités totales}) \\ &= P_{X_0=i}(X_n=1)P_{X_n=1}(X_{n+1}=j) + P_{X_0=i}(X_n=2)P_{X_n=2}(X_{n+1}=j) \quad (\text{On utilise } P_{X_0=i}(A \cap B) = P_{X_0=i}(A)P_A(B)) \\ &= P_{X_0=i}(X_n=1)p_{1j} + P_{X_0=i}(X_n=2)p_{2j} \quad (\text{car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de } n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } P^{n+1} &= P^n P = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad \text{d'après (HR)} \\ &= \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1)p_{11} + P_{X_0=1}(X_n=2)p_{21} & P_{X_0=1}(X_n=1)p_{12} + P_{X_0=1}(X_n=2)p_{22} \\ P_{X_0=2}(X_n=1)p_{11} + P_{X_0=2}(X_n=2)p_{21} & P_{X_0=2}(X_n=1)p_{12} + P_{X_0=2}(X_n=2)p_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

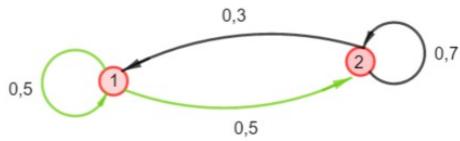
On a donc démontré que  $P(n+1)$  est vraie

#### Conclusion :

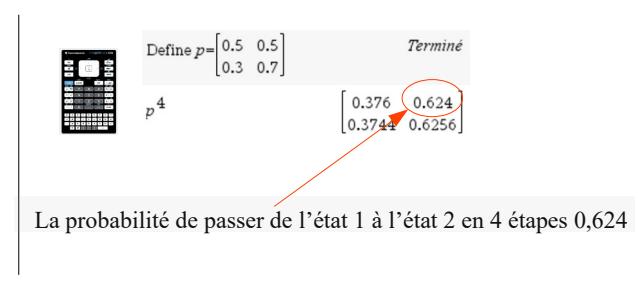
$P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , c'est à dire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$

#### Exemple :

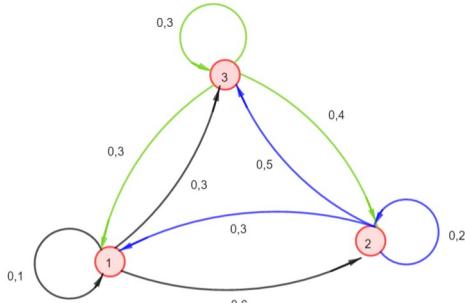
- On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et  $P$  la matrice de transition associée.



$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$



- On considère une marche aléatoire à trois états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et  $P$  la matrice de transition associée.



$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Define  $p = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$  Terminé

$p^3$

$$\begin{bmatrix} 0,244 & 0,396 & 0,36 \\ 0,252 & 0,364 & 0,384 \\ 0,252 & 0,372 & 0,376 \end{bmatrix}$$

La probabilité de passer de l'état 3 à l'état 1 en 3 étapes 0,252

## 4) CHAÎNES DE MARKOV : ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

### Définition :

Soit une chaîne de Markov à 2 ( respectivement 3 ) états et  $P$  la matrice de transition associée.

On note  $\pi_n$  la matrice ligne à 2 ( respectivement 3 ) colonnes dont le terme de la  $j$ -ième colonne est la probabilité qu'à l'étape  $n$  la variable aléatoire  $X_n$  soit égalé à  $j$ , c'est à dire :

$$\pi_n = (P(X_n=1) \quad P(X_n=2)) \quad (\text{respectivement } \pi_n = (P(X_n=1) \quad P(X_n=2) \quad P(X_n=3)))$$

**Remarque :**  $\pi_0$  représente la distribution initiale et  $\pi_n$  la distribution après  $n$  transitions.

### Propriété :

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $\pi_{n+1} = \pi_n P$  et  $\pi_n = \pi_0 P^n$ .

$P^n$  ne contient pas de 0 signifie qu'en  $n$  étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre état.

### Preuve : Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états. exigible

Par définition de la matrice de transition  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$  où  $p_{ij} = P_{X_0=i}(X_1=j)$  ( avec  $i \in \{1;2\}$  et  $j \in \{1;2\}$  )

Soit un entier naturel  $n$ . On a :

$$P(X_{n+1}=1) = P(X_{n+1}=1 \cap X_n=1) + P(X_{n+1}=1 \cap X_n=2) \quad (\text{D'après la formule des probabilités totales})$$

$$= P(X_n=1)P_{X_n=1}P(X_{n+1}=1) + P(X_n=2)P_{X_n=2}P(X_{n+1}=1)$$

$$= P_{X_n=1}P(X_{n+1}=1)P(X_n=1) + P_{X_n=2}P(X_{n+1}=1)P(X_n=2)$$

$$= p_{11}P(X_n=1) + p_{21}P(X_n=2) \quad (\text{car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de } n)$$

On démontre de même que  $P(X_{n+1}=2) = p_{12}P(X_n=1) + p_{22}P(X_n=2)$ . On a donc bien  $\pi_{n+1} = \pi_n P$

On suppose maintenant  $n \geq 1$ . On a déjà vu que  $P^n = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \pi_0 P^n &= (P(X_0=1) \quad P(X_0=2)) \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2) \end{pmatrix} \\ &= (P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=1) + P(X_0=2)P_{X_0=1}(X_n=1) \quad P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=2) + P(X_0=2)P_{X_0=1}(X_n=2)) \\ &= (P((X_0=1) \cap (X_n=1)) + P((X_0=2) \cap (X_n=1)) \quad P((X_0=1) \cap (X_n=2)) + P((X_0=2) \cap (X_n=2))) \\ &= (P(X_n=1) \quad P(X_n=2)) \\ &= \pi_n \end{aligned}$$

### Propriété : admise

S'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $P^n$  ne contient pas de 0 alors la suite  $(\pi_n)$  converge vers la matrice  $\pi$  vérifiant  $\pi = \pi P$  et cette limite ne dépend pas de  $\pi_0$ .

La matrice  $\pi$  représente la **distribution invariante du système**.

**Remarque :** Si la matrice  $P$  ne contient pas de 0, alors la suite  $(\pi_n)$  converge.