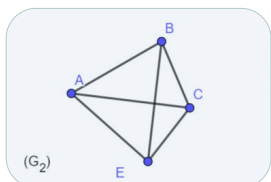


Graphes non-orientés :

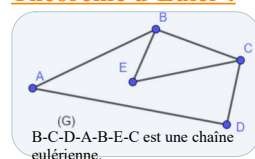


Propriété :

Parcourir un graphe non-orienté :

Chaîne eulérienne :

Théorème d'Euler :



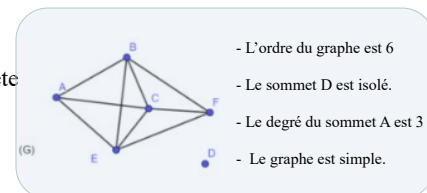
Graphes orientés :

Matrice d'adjacence :

Exemple :

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est symétrique

- Un **graphe non-orienté** G est un ensemble de sommets reliés par des arêtes.
- Les points A ; B ; C ; D ; E et F sont **les sommets** du graphe.
- L'ordre** d'un graphe est le nombre total de sommets.
- Les segments reliant deux sommets sont **des arêtes**.
- Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.
- Une arête reliant deux sommets est dite **incidente** à ces deux sommets.

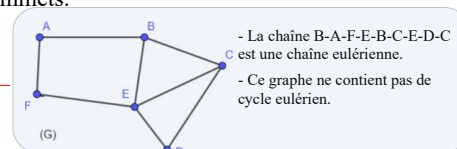


- Une arête est une **boucle** si elle relie un sommet à lui-même.
- Le degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. (Une boucle compte double)
- Un sommet est **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet.
- Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- Un **sous graphe** (G') de (G) est un graphe composé de certains sommets et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.
- Un graphe (G) ou un sous graphe (G_1) de (G) est **stable** lorsqu'il ne contient aucune arête.
- Un graphe (G) ou un sous graphe (G_2) de (G) est **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents.

- La somme S des degrés** des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes a du graphe
- Dans un graphe simple non-orienté **le nombre de sommets de degré impair** est pair.

- Une **chaîne** d'un graphe est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant.
- La longueur** d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- Une **chaîne est fermée** lorsque son origine et son extrémité sont confondues.
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
- Un graphe est **connexe** si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.
- La distance** entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes qui les relient.
- Le diamètre d'un graphe** est la plus grande distance entre deux sommets. (en choisissant le plus court chemin)

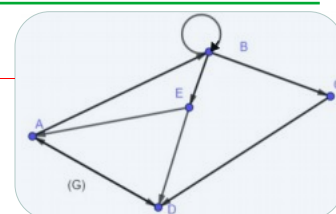
- Une chaîne est **eulérienne** lorsqu'elle contient une et une seule fois chaque arête du graphe.
- Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée.



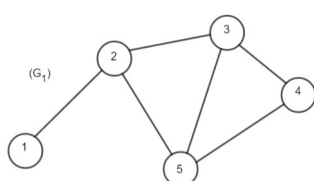
Dans le cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si **le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2**.

- Pour qu'un graphe connexe (G) admette un **cycle eulérien**, il faut et il suffit que tous les sommets de (G) soient de **degré pair**.
- Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, alors ce sont **les extrémités de la chaîne eulérienne**.
- Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes (ou **arcs**) sont orientées.
- Le sommet A et le sommet B d'une arête orientée reliant A à B s'appellent respectivement **l'origine** et **l'extrémité** de l'arête orientée $A - B$.
- On parle de **degré entrant** pour indiquer le nombre d'arcs se dirigeant vers le sommet et de **degré sortant** pour indiquer le nombre d'arcs partant du sommet.
- Une **chaîne orientée** d'un graphe orienté est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit relié au suivant par l'arête orientée dont il est l'origine.



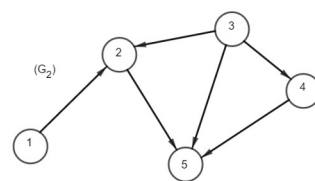
On numérote les sommets d'un graphe orienté (G) d'ordre n . La matrice carrée associée au graphe (G) (orienté ou non) est la matrice à n lignes et à n colonnes où le terme a_{ij} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i à j . Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence** du graphe.



La matrice d'adjacence de (G_1) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

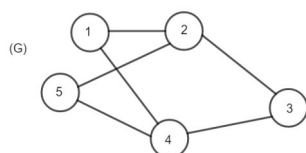
La matrice d'adjacence de (G_2) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


Nombre de chaînes de longueur k :

Exemple :

Soit M la matrice d'ordre n associée à un graphe (G) et un entier naturel non nul k . Le terme de la matrice M^k situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j .



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe 6 chaînes de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 3.