Thèmes d'étude :

Inférence bayésienne
Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
Temps d'attente
Modèles d'évolution

Lois à densité : généralités

Ex 9-1 : ***Vrai ou faux***

Une fonction densité f définie sur I :

1) est monotone sur I

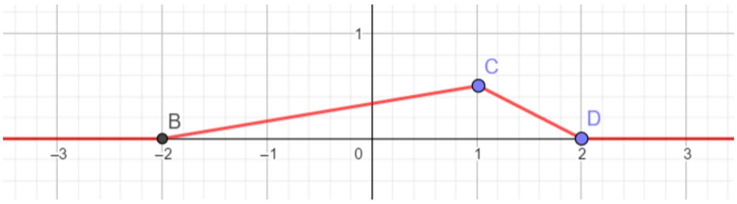
2) ne prend que des valeurs positives ou nulles

3) a une primitive sur I égale à 1

4) a une intégrale qui vérifie $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=1$

Ex 9-2 : ***Reconnaître une densité***

Soit f une fonction et C_f sa représentation graphique représentée ci-dessous :



1) Le point C a pour abscisse 1 . A quelle condition portant sur l'ordonnée de C la fonction f est-elle la fonction densité d'une variable aléatoire X ?

2) Calculer $P(0\leqslant X\leqslant 2)$

Ex 9-3 : ***Reconnaître une densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Calculer $P(-3\leqslant X\leqslant -2)$.

Ex 9-4 : ***Reconnaître une densité – Fonction de répartition – Paramètres***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}6x(1-x) \text{ si } x\in[0;1]\\ 0 \text{ si } x\notin[0;1]\end{cases}$

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Calculer $P\left(\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

4) Déterminer la fonction de répartition F de X et vérifier que pour tout $t\in[0;1]$, $F'(t)=f(t)$

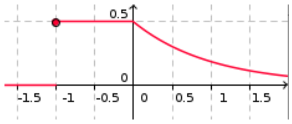
5) Retrouver le résultat de la question 3 en utilisant la fonction de répartition F .

6) Calculer E(X), V(X) et σ (X).

Ex 9-5 : ***Reconnaître une densité – Fonction de répartition – Paramètres***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1\leq x\leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$,

1) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.



2) Calculer $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2}<\mathrm{X}<3\right)$

3) Déterminer la fonction de répartition F de X et vérifier que pour tout $t\in[0;1]$, $\mathrm{F}'(t)=f(t)$

4) Retrouver le résultat de la question 2 en utilisant la fonction de répartition F .

Loi uniforme

Ex 9-6 : ***Quelques démonstrations***

1) Montrer que la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t)=\dfrac{1}{b-a}$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) Déterminer E(X).

Ex 9-7 : ***QCM***

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1;4]$.

1) Elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x\in[-1;4] \\ 0 & \text{si } x\notin[-1;4] \end{cases}$$

avec : a) $a=1$ b) $a=4$ c) $a=5$ d) $a=\frac{1}{5}$

2) a) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0$ b) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1}{2}$ c) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{3}{2}$ d) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=1$

Ex 9-8 : ***Choisir un nombre au hasard***

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[10;80]$.

1) Déterminer la probabilité que ce nombre soit compris entre 30 et 60.

2) Déterminer la probabilité que ce nombre soit inférieur à 30.

3) Déterminer la probabilité que ce nombre soit supérieur à 70.

Ex 9-9 : ***Choisir un nombre au hasard***

On choisit un nombre dans l'intervalle $]0;1[$.

1) Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[0,2;0,3]$?

2) Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 0,6 ?

3) Quelle est la probabilité que le premier chiffre après la virgule soit supérieur ou égal à 7 et que le second chiffre après la virgule soit 2 ?

Ex 9-10 : ***Tableur : simulation d'une loi uniforme avec* ALEA()**

1) Écrire la formule simulant une loi uniforme $U(3;8)$ avec la fonction ALEA() d'un tableur.

Note : ALEA() renvoie un nombre aléatoire entre **0** (inclus) et **1** (exclus).

2) Écrire la formule donnant la fréquence de valeurs comprises entre 4 et 5 pour une simulation réalisée avec 500 cellules.

3) Ouvrir une feuille de calcul et appliquer les formules des questions 1 et 2. Quelle est la fréquence obtenue ?

Ex 9-11 : ***Temps d'attente***

On suppose que le temps d'attente à un arrêt de bus (en min) , suit la loi uniforme sur $[0;30]$.

1) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 10 et 15 min.

2) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit inférieure à 10 min.

3) Quel est le temps moyen d'attente à cet arrêt de bus ?

4) Sachant qu'une personne attend le bus depuis 15 min, quelle est la probabilité qu'elle attende au moins encore 5 minutes ?

Ex 9-12 : **Y=X+*a***

Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[3;4]$.

1) Rappeler la fonction densité f et la fonction de répartition F de X.

2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=X+2$.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x\leqslant 5$, pour $x\geqslant 6$ et pour $x\in[5;6]$

En déduire la fonction de répartition G de Y.

c) En utilisant G, déterminer la loi que suit la variable aléatoire Y.

3) Comparer les espérances et les variances de X et de Y.

Ex 9-13 : Y=*a* X

Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0;6]$.
1) Rappeler la fonction densité f et la fonction de répartition F de X.

2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=3X$.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x\leqslant 0$, pour $x\geqslant 18$ et pour $x\in[0;18]$

En déduire la fonction de répartition G de Y.

c) En utilisant G, déterminer la loi que suit la variable aléatoire Y.

3) Comparer les espérances et les variances de X et de Y.

Loi exponentielle

Ex 9-14 : *Quelques démonstrations*

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ (où λ est un réel strictement positif) est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

<u>Ex 9-15 :</u> ***Reconnaître la loi exponentielle***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-2x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de λ la fonction f est-elle densité de la loi exponentielle ?

2) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X suivant la loi définie précédemment.

3) Déterminer la fonction de répartition F de X.

4) Vérifier que $P(1\leqslant X\leqslant 2)=F(2)-F(1)$

<u>Ex 9-16 :</u> ***Médiane et premier quartile***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle d'espérance 20.

1) Déterminer la fonction densité de X.

2) Déterminer le réel m , tel que $P(X\leqslant m)=\frac{1}{2}$

Définition : m est la médiane de la distribution de X.

3) Déterminer le réel q tel que $P(X\leqslant q)=\frac{1}{4}$.

Définition : q est le premier quartile de la distribution de X.

<u>Ex 9-17 :</u> ***Durée de vie***

La durée de vie (en jours) d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,001.

1) On prélève un composant au hasard. Calculer la probabilité que le composant ait une durée de vie :
a) comprise entre 200 et 300 jours,

b) inférieure à 400 jours,

c) supérieure à 500 jours.

2) Quelle est la durée de vie moyenne de ces composants électroniques ?

Ex 9-18 : Y=X+*a*

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction densité f de X et donner la fonction de répartition F de X.

2) On considère une nouvelle variable aléatoire $\mathrm{Y}=\mathrm{X}+2$.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leqslant x)$ pour $x<2$ et pour $x\geqslant 2$.

En déduire la fonction de répartition G de Y.

c) La variable aléatoire Y suit-elle une loi exponentielle ?

3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 9-19 :

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda>0$) .

1) On considère une nouvelle variable aléatoire $\mathrm{Y}=a\mathrm{X}$ (avec $a>0$).

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leqslant x)$ pour $x<0$ et pour $x\geqslant 0$.

c) Quelle loi suit la variable aléatoire Y ?
En déduire la fonction de répartition G de Y.

3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 9-20 : ***Avec des suites***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=4$
Soit $n\in\mathbb{N}$.

1) Calculer $a_0=P(0\leqslant X\leqslant 1)$, $a_1=P(1\leqslant X\leqslant 2)$ et $a_n=P(n\leqslant X\leqslant n+1)$.

2) Soit F la fonction de répartition de X, définie .

Exprimer a_n en fonction de $F(n)$ et de $F(n+1)$.

Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

Ex 9-21 : ***Durée de vie et mort sans vieillissement***

La durée de vie d'un écran LCD, exprimée en années, est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

On admet qu'en moyenne, un écran a une durée de vie de 8 ans.
1) Déterminer la valeur de λ .

2) Déterminer la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 8 ans, puis la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 10 ans. Comparer ces deux résultats.

3) Si un tel écran fonctionne depuis 2 ans, quelle est la probabilité pour qu'il ait une durée de vie totale supérieure à 10 ans ?

D'autres lois

Ex 9-22 : ***Existence et calcul d'une espérance***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{2}{3}x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Étudier $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t x f(x) \mathrm{d}x$

4) X admet-elle une espérance ?

Ex 9-23 : ***La loi de Laplace***

Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour densité la fonction f , définie par $f(x) = a\,e^{-\lambda|x|}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Quelle relation existe-t-il entre a et λ pour que f soit une fonction densité ?

2) Tracer la courbe représentative de f pour $a=2$.

3) X admet-elle une espérance ? Si oui quelle est sa valeur ?

Problèmes

Ex 9-24 : ***Sur la route du lycée – temps de parcours – indépendance***

Amine habite à 1km du lycée Lyautey . Soit X la variable aléatoire égale à la durée (en min) du trajet qu'Amine emprunte pour se rendre au lycée. X suit la loi uniforme sur [15;20].

1) a) Donner la fonction densité de la loi suivie par X.

b) Quel est le temps moyen du trajet ?

c) Quelle est la probabilité qu'il mette moins de 18 min ?

2) On suppose que pour chaque jour de la semaine, la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets.
Sur une semaine Amine se rend à son lycée tous les jours du lundi au samedi.
Quelle est la probabilité qu'au moins un trajet ait duré plus de 18 minutes ?

<u>Ex 9-25 :</u> ***Sur la route du lycée – perte de livre – indépendance***

Samia, un peu étourdie, effectue un trajet de longueur L pour se rendre au lycée Lyautey . Au cours de ce trajet, elle perd successivement son livre de math et son livre de philo.
Ceci se produit de façon indépendante pour chaque livre et de façon équiprobable en tout point du parcours.

1) Soit X_P et X_M les variables aléatoires donnant (resp) la distance du point de départ au point de chute du livre de philo et du livre de math.

a) Donner le domaine de définition de X_P et X_M .

b) Déterminer les lois suivies par X_P et X_M , puis leur espérance.

2) Au lycée, Samia se rend compte de la disparition de ses livres . Elle refait le trajet en sens inverse.
Quelle est la probabilité qu'ayant effectué en sens inverse la distance Δ , Samia ait retrouvé :
a) ses deux livres ?

b) au moins un de ses deux livres ?

<u>Ex 9-26 :</u> ***Radioactivité***

On considère un noyau radioactif . On admet que sa durée de vie (en années) est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1) a) Rappeler la densité de probabilité f de X.

b) Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}^+$. Calculer $\mathrm{P}(t \leqslant \mathrm{X} \leqslant t+h)$.

c) On sait que ce noyau radioactif n'est pas désintégré à l'instant t .
Montrer que la probabilité que ce noyau ne se désintègre pas entre les instants t et $t+h$ ne dépend pas de t .

2) La demi-vie d'un élément radioactif est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux initialement présents sont désintégrés, c'est à dire le nombre T tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{T}) = \frac{1}{2}$.
Exprimer en fonction de λ la demi-vie T d'un élément radioactif.

3) Un déchet a une courte durée de vie lorsque sa demi-vie est inférieure à 30 ans.

a) Déterminer un minorant de λ .

b) Ces déchets doivent être isolés de l'homme pendant la durée nécessaire pour que la probabilité qu'un noyau se désintègre soit supérieure à 99,9 %.
Déterminer ce nombre minimal d'années.

4) Lors de la catastrophe de Tchernobyl en 1986, vingt radionucléides ont été disséminés, dont l'iode 131 , d'une demi-vie de 8 jours.

Des mesures effectuées actuellement devraient-elles mettre en évidence

la présence d’iode 131 ?