Variable aléatoire continue et densité :

Si $I=[a\,;b]$,

$\int_I f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I, s'il existe une fonction f :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques réels) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}\,t=1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X\in J)=\int_J f(t)\,\mathrm{d}\,t$

f est appelée **densité** de X

En l'infini :

Si $I=[a\,;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ existe : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}\,t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$

La probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle :

$P(X=a)=P(X\in[a\,;a])=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0$ et en conséquence on a :

$P(X\in[a\,;b])=P(X\in[a\,;b[)=P(X\in]a\,;b])=P(X\in]a\,;b[)$ et $P(X>a)=P(X\geqslant a)$, etc ...

Fonction de répartition :

Soit une variable aléatoire X de densité f .

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F définie pour tout réel t par :

$$F(t)=P(X\leqslant t)$$

Pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)$

En tout réel t où **la fonction de répartition est dérivable**, on a $F'(t)=f(t)$.

Espérance, variance et écart type :

$$E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t \qquad V(X)=\int_a^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

En l'infini :

- Si $I=[a;+\infty[$, $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t$ (si elle existe) et $V(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ (si elle existe)
- Si $I=]-\infty;b]$, $E(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t$ (si elle existe) et $V(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b (t-E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ (si elle existe)

Loi uniforme :

Cette formule est à rapprocher de la formule :

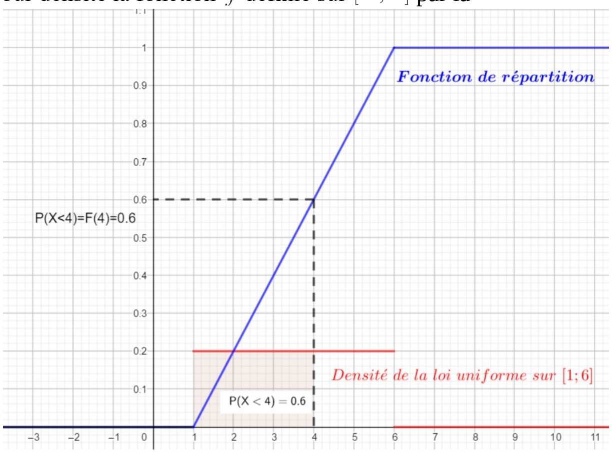
$\dfrac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

La loi uniforme sur $[a\,;b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par la fonction constante : $f:t\longmapsto\dfrac{1}{b-a}$

Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a :

$P(X\in[c\,;d])=\dfrac{d-c}{b-a}$



Fonction de répartition :

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

$$F(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<a\\ \dfrac{t-a}{b-a} \text{ si } t\in[a\,;b]\\ 1 \text{ si } t>b\end{cases}$$

Espérance, variance et écart type :

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Loi exponentielle :

Soit λ un réel strictement positif. La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f:t\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0\leqslant c\leqslant d$, $P(X\in[c\,;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$
- Pour tout réel $a\geqslant0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a\geqslant0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$

Durée de vie sans vieillissement :

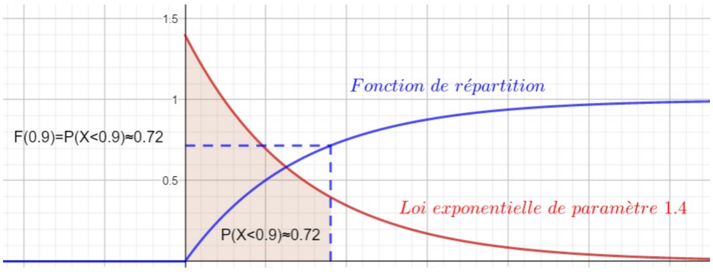
Pour tous réels positifs s et t, on a : $P_{X>s}(X>s+t)=P(X>t)$

Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Fonction de répartition :

La fonction de répartition est la fonction F définie par :

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} \text{ si } t\geqslant0\\ 0 \text{ si } t<0\end{cases}$$



Espérance, variance et écart type :

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$