Thèmes d'étude :

Inférence bayésienne
Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
Temps d'attente
Modèles d'évolution

Loi uniforme discrète

Ex 8-1 ***Lancer d'un dé***

1) On considère un dé équilibré à 6 faces.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le résultat du lancer de dé.
La loi de X est-elle uniforme ?

2) On considère la loi uniforme sur $\{1;2;\dots;n\}$.
Quelle est la valeur de la probabilité d'un événement élémentaire ?

Ex 8-2 : ***Inégalités et espérance***

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;\dots;100\}$

1) Calculer $P(X=50)$, $P(25\leqslant X\leqslant 75)$ et $P(X>50)$

2) Déterminer E(X), puis interpréter le résultat.

Ex 8-3 : ***Python : randint()***

En Python, randint(1,50) renvoit un nombre aléatoire entier compris entre 1 et 50 suivant la loi uniforme discrète.
Sachant que le nombre affiché est pair (événement Pa), quelle est la probabilité que ce soit un multiple de 10 (événement D) ?

Ex 8-4 : ***Roue de loterie***

Une roue de loterie équilibrée est partagée en 16 secteurs de même angle au centre . Chaque secteur est numéroté de 1 à 16 . La roue est lancée puis s'arrête, de manière équiprobable sur un secteur.
1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui donne le numéro du secteur.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe 1 lorsque le numéro est pair et 2 lorsque le numéro est impair.
Déterminer la loi de Y, son espérance, sa variance et son écart type.

Successions d'expériences

Ex 8-5 : ***Expériences aléatoires indépendantes ou non***

Définitions et propriétés : (rappels)

- Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :
$P_B(A)=P(A)$ ou $P_A(B)=P(B)$ ou $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

- Lorsque deux expérience aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'influent pas les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes.**

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si les deux expériences aléatoires sont indépendantes ou non.

1) On lance deux fois un dé non truqué.

2) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on met de côté, puis on tire une seconde carte.
3) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on remet dans le paquet, puis on tire une seconde carte.

4) Pour payer sa baguette de pain, une cliente sort au hasard une première pièce de son porte-monnaie puis une seconde.

<u>Ex 8-6 :</u> *Vrai ou faux*

On effectue, dans une urne contenant dix jetons noirs et vingt jetons blancs, deux tirages successifs avec remise du jeton tiré dans l'urne.

1) La probabilité d'obtenir deux jetons noirs est égale à $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

2) La probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égales à $\frac{2}{3}\times\frac{19}{29}$.

3) La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$

4) La probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente est égale à $\frac{4}{9}$.

<u>Ex 8- 7 :</u> *Arbre pondéré*

1) Dans une crèche, un jeu de construction en bois de 50 pièces comporte 20 cubes, 10 cylindres et 20 parallélépipèdes droits.
Un enfant choisit au hasard une pièce du jeu puis la repose dans la baril où est rangé le jeu . Il recommence l'opération. Représenter les deux expériences à l'aide d'un arbre pondéré.

2) a) Sur les pièces cubes est gravé le chiffre 5, sur les cylindres le chiffre 2 et sur les pavés le chiffre 3.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la somme des deux chiffres obtenus.

b) Déterminer l'espérance de cette variable aléatoire, puis interpréter le résultat.

<u>Ex 8-8 :</u> *Probabilités conditionnelles et variable aléatoire*

On considère une urne A contenant trois boules jaunes et sept boules bleues et une urne B contenant quatre boules vertes, deux boules rouges et deux boules jaunes . Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard de manière équiprobable une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

3) Déterminer la probabilité de l'événement J : «Obtenir une boule Jaune »

4) Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

5) Combien faudrait-il ajouter de boules vertes dans l'urne B pour avoir $P(J)=0,2$?

Ex 8-9 : ***Simuler une succession d'épreuves indépendantes***

On aimerait simuler l'expérience aléatoire consistant à tirer 10 fois de manière successive et avec remise une boule dans une urne contenant 1 boule portant le numéro 1, 4 boules portant le numéro 3 et 5 boules portant le numéro 2.

Compléter le programme ci- dessous qui permet de simuler et d'afficher 20 fois cette expérience.

```
from random import random
def simul():
   b=[]
   for i in range(10):
      a=……...
      if (a<=……...):
         b.append(……...)
      else:
         if (a>=……...):
            b.append(……...)
         else:
            b.append(……...)
   return(……...)

for i in range(……...):
   print(……...……...)
```

Épreuve de Bernoulli

Ex 8-10 : ***Vrai ou faux***

Les expériences suivantes correspondent-elles à des épreuves de Bernoulli.

1) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on note le résultat obtenu.

2) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on s'intéresse à la parité du résultat obtenu.

3) Pour jouer à « pile ou face », on lance deux pièces de monnaie et on note le nombre de « pile » obtenu .

4) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note la couleur de la boule obtenue.

5) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note si la couleur de la boule obtenue se retrouve dans le drapeau français.

Schéma de Bernoulli - Loi binomiale

Ex 8-11 : ***Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale***

Dire lesquelles des expériences 1 et 2 correspondent à des schémas de Bernoulli et lesquelles des variables aléatoires X et Y suivent une loi binomiale.

Expérience 1 :
On lance dix fois un dé à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Lors d'un lancer, si le numéro qui apparaît est 1 alors c'est un succès, sinon c'est un échec.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ces séries de 10 lancers et Y la variable aléatoire telle que si le lanceur a eu plus de 7 succès il gagne 10€ sinon il perd 5€.

Expérience 2 :
On lance une pièce, on note F si face apparaît et P si pile apparaît.
- Si le résultat du lancer est F alors on tire une boule de l'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire
- Si le résultat du lancer est P alors on tire une boule de l'urne 2 contenant une boule blanche et une boule bleue.

Ex 8-12 : ***Définir les paramètres de la loi binomiale***

Dans chacun des cas, justifier que la situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

1) À Genève en 2008, l'institut de recherche sur les allergies et l'asthme a annoncé qu'un vaccin contre l'allergie aux chats a été testé avec succès sur des souris. En effet le vaccin guéri l'allergie chez les souris dans 88% des cas. Un laboratoire a testé le vaccin sur une population de 30 souris allergiques. Chaque matin un laborantin prélève trois souris de l'échantillon pour effectuer des analyses, prélèvement que l'on considère comme étant avec remise.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de souris saines prélevées par le laborantin.

2) Alexandre joue à la roulette (numérotée de 0 à 36). Il mise 15 fois de suite sur le numéro « 24 ». On appelle X le nombre de parties remportées par Alexandre.

Ex 8-13 : ***Vrai ou faux : loi binomiale – coefficients binomiaux***

Soit k et n deux entiers naturels ?

1) Dans un schéma de k épreuves de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant n succès.

2) Le coefficient $\binom{5}{4}$ n'existe pas.

3) $\binom{4}{0}=\binom{4}{4}=\binom{7}{7}=\binom{7}{0}$

4) $\binom{n+1}{1}=\binom{n}{1}+1$

5) $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$

6) L'équation $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=\binom{k}{5}$ a pour solution 8.

Ex 8-14 : ***Coefficient binomiaux – sans calculatrice – triangle de Pascal***

1) Calculer sans calculatrice :

$\binom{111}{0}$ $\qquad$ $\binom{15}{15}$ $\qquad$ $\binom{412}{1}$

$\binom{15}{5}-\binom{15}{10}$ $\qquad$ $\binom{85}{84}$ $\qquad$ $\binom{86}{80}-\binom{85}{80}-\binom{85}{79}$

2) À l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs des coefficients binomiaux de la forme $\binom{6}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 6.

Ex 8-15 : ***Utilisation de la calculatrice***

1) Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,7$. Calculer à 10^{-3} près avec la calculatrice les probabilités suivantes.

a) $P(X=20)$

b) $P(X<20)$

c) $P(X\leqslant 20)$

d) $P(X>20)$

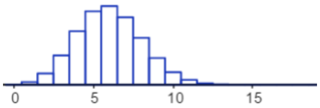
2) X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que

$P(X=3)=\binom{40}{3}\ 0,2^3\ 0,8^{37}$. Déterminer $P(X=5)$

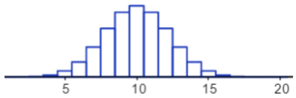
<u>Ex 8-16 :</u> ***Choisir la bonne représentation***

Associer chaque représentation à la loi binomiale qu'il représente.

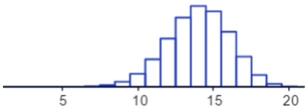
B(20 ; 0,7)



B(20 ; 0,3)



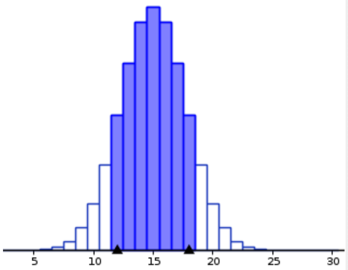
B(20 ; 0,5)



<u>Ex 8-17 :</u> ***Propriété géométrique***

On considère une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,5$.

On a tracé la représentation graphique de X avec GeoGebra



9	0.0133
10	0.028
11	0.0509
12	0.0806
13	0.1115
14	0.1354
15	0.1445
16	0.1354
17	0.1115
18	0.0806
19	0.0509
20	0.028
21	0.0133
22	0.0055

1) Quelle propriété géométrique observe-t-on ?

2) Justifier cette propriété.

<u>Ex 8-18 :</u> ***Burj Khalifa***

Burj Khalifa, gratte ciel le plus haut du monde (en 2010) situé à Dubaï, compte 57 ascenseurs.

La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,006. On considère que les pannes sont indépendantes les unes des autres.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné. X suit la loi binomiale de paramètres 57 et 0,006.

Calculer et interpréter :

1) $P(X=2)$

2) $P(X\leqslant 2)$

3) $E(X)$

<u>Ex 8-19 :</u> ***Singe et clavier***

Un singe tape 300 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le singe a tapé sur la lettre « Z ».

1) Justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

2) Calculer et interpréter :

a) $P(X=20)$

b) $P(X\leqslant 20)$

c) $E(X)$

Loi géométrique

Ex 8-20 :

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre 0,4.

Calculer $P(X=4)$, $E(X)$ et $\sigma(X)$

Ex 8-21 :

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$, X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p et Y la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $1-p$.

Montrer que $P(X=2)=P(Y=2)$.

Ex 8-22 : $P(X>n)=(1-p)^n$

Soit p un réel appartenant à $[0;1]$ et X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $P(X>n)=(1-p)^n$

On pourra utiliser ce résultat dans la suite des exercices.

Ex 8-23 : ***Lancers d'une pièce de monnaie***

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée plusieurs fois de suite et on s'arrête dès que l'on obtient face.

1) Quelle est la probabilité de s'arrêter au bout de 5 lancers ?

2) Quelle est la probabilité de s'arrêter avant 6 lancers ?

3) On a déjà effectué 10 lancers et obtenu que des piles.

Quelle est la probabilité de s'arrêter au moins au bout de 14 lancers ?

Problèmes et algorithmes

Ex 8-24 : ***Composants électroniques***

Un constructeur de composants électroniques produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 5×10^{-3}.

On prélève un lot de 1000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistances est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1000 résistances.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement deux résistances défectueuses »

b) « le lot contient au plus trois résistances défectueuses »

c) « le lot contient au moins quatre résistances défectueuses »

3) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X . Interpréter l'espérance dans le cadre de l'énoncé.

Ex 8-25 : ***Lecteurs MP3 – Gain algébrique***
(D'après Bac S – Polynésie juin 2009)

Après fabrication, les lecteurs MP3 d'une entreprise (dont 6 % sont défectueux) subissent quatre contrôles successifs indépendants pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.
Un lecteur MP3 est :
- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros.
Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.
1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

Aide : Utiliser la variable aléatoire Y égale au nombre de contrôles où un lecteur MP3 est rejeté.

2) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

Ex 8-26 : ***Passer au tableau ...***

Un professeur de mathématiques a créé un petit programme permettant d'afficher la photo de l'élève qui passera au tableau en début de cours pour corriger un exercice au tableau . Un élève peut passer plusieurs fois au tableau dans la semaine.
Le programme choisit aléatoirement un nombre entre 1 et 33 et chaque nombre correspond à la photo d'un élève de la classe.
Le choix d'une photo suit la loi uniforme discrète sur $\{1;2;3...;33\}$, et les tirages successifs sont indépendants.
Alexandre est le numéro 10.
On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de cours avant que Alexandre passe au tableau la première fois.
Arrondir les résultats à 10^{-3} près.

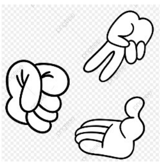
1) Quelle est la probabilité que sur sur les quatre cours de la semaine, Alexandre ne passe pas au tableau ?

2) Quelle est la probabilité que Alexandre passe au tableau la première fois au 10-ième cours ?

3) Alexandre n'est pas passé au tableau pendant 40 cours . Quelle est la probabilité qu'il aille au tableau dans les 10 cours qui suivent ?

Ex 8-27 : ***Pierre-papier-ciseaux***

Alexandre et Camille jouent à Pierre-Papier-Ciseaux.
Camille n'aime pas perdre ni faire match nul, et joue contre son frère Alexandre jusqu'à ce qu'il gagne.
On suppose qu'ils jouent de manière aléatoire et que chaque partie est indépendante des précédentes.



On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de parties nécessaires pour que Camille gagne la première partie.

1) Quelle est la loi suivie par X ?

2) Quelle est la probabilité que Camille gagne pour la première fois au bout de trois parties ?

3) Quelle est la probabilité que Camille gagne pour la première fois avant la cinquième partie.

4) Sur les dix premières parties, Camille, très malchanceux, n'a pas gagné une seule partie . Quelle est la probabilité qu'il gagne la onzième partie ?

5) Déterminer l'espérance de X.

Ex 8-28 : ***Parc de centrales nucléaires***

Un défenseur du nucléaire informe que le risque qu'une panne se produise dans une centrale nucléaire est de l'ordre de 10^{-4} .

La réponse de son interlocuteur est la suivante : « Mais pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est d'environ 10^{-2} ».

Cette réponse est-elle correcte ?

<u>Ex 8-29 :</u> ***QCM***

Un QCM est composé de 8 questions indépendantes.
Pour chaque question quatre réponses sont proposées et une seule de ces quatre réponses est juste.
Un candidat répond au hasard aux 8 questions de ce QCM.
On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer $P(N=8)$ et $P(N=4)$ à 10^{-4} près.

3) Donner la loi de probabilité de N sous forme de tableau.

4) Calculer l'espérance mathématique de N.

5) Que dire d'un QCM noté +1 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

6) On fait la supposition qu'une note négative est possible.
On note le QCM de la manière suivante :

$-a$ pour une mauvaise réponse et + b pour une bonne réponse
On note G la variable aléatoire correspondant à la note obtenue.
Comment doit-on noter ce QCM pour qu'un candidat qui répond au hasard ait en moyenne 0 ?

<u>Ex 8-30 :</u> ***Jeu de grattage***

Dans un jeu de grattage, un joueur à 5 % de chance de gagner.

Un joueur décide de jouer n fois de façon indépendante.

1) Déterminer la probabilité p_n de gagner au moins une fois.

2) Écrire en python une fonction « grattage » qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,7$.

3) Déterminer cette valeur.

4) Retrouver ce résultat par le calcul.

Ex 8-31 : ***Triangle de Pascal***

Blaise Pascal
https://fr.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

1) On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
pa=[1,2,1]
na=pa+[1]
print(na)
```

Que fait ce programme ?

2) On aimerait obtenir la ligne na=[1,3,3,1] du triangle de Pascal.

On constate que pour na[0] et na[3], il n'y a rien à faire.

Comment obtenir na[1] et na[2] à partir de la liste pa ?

3) Compléter le programme ci- dessous qui permet de générer le triangle de Pascal :

```
def Pascal(n):
    pa=[1]
    for k in range(n):
        na= ……...
        for i in range ( ……… ):
            ……..……...……...
        pa=na
    return(pa)

n=int(input("n="))
for i in range(……..……..):
    print(……..……...)
```

4) Tester ce programme pour n=10.