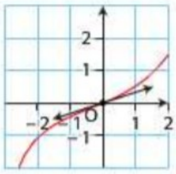
Thèmes d'étude :

Modèles d'évolution
Modèles définis par une fonction d'une variable

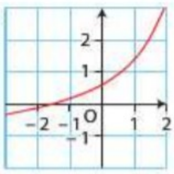
Ex 7-1 : ***À partir d'une courbe***

Pour chaque courbe, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave. Préciser les éventuels points d'inflexion.
On considère que le comportement de la courbe se poursuit de manière identique en dehors de la fenêtre.

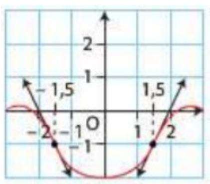
1)



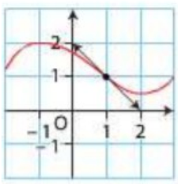
2)



3)



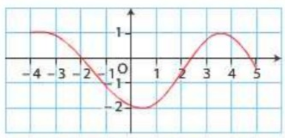
4)

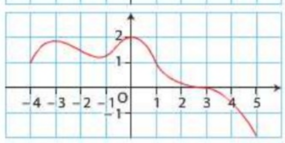


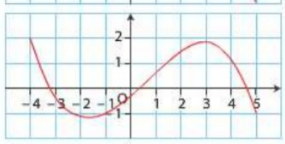
Ex 7-2 : ***À partir d'une courbe***

Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4\,;-2]$ et sur $[4\,;5]$
- $f\,'$ s'annule au moins trois fois
- la représentation graphique de f admet quatre points d'inflexion.







Ex7-3 : ***À partir d'un tableau de variation de f'***

Voici le tableau de variation de la fonction $f\,'$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f\,'(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	2 ↘	1

1) Déterminer le sens de variation de f

2) Déterminer la convexité de f

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 7-4 : ***À partir du tableau de signe de de f''***

Voici le tableau de signe de la fonction $f\,''$ d'une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f\,''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

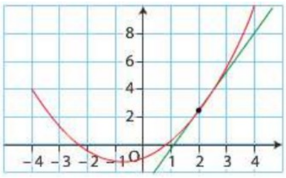
1) Déterminer le sens de variation de $f\,'$.

2) Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses des éventuels point d'inflexion.

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 7-5 : *Position par rapport aux tangentes et inégalités*

Dans le repère ci-contre, on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.



1) Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle [−4 ; 4].

2) Pourquoi peut-on étendre ce résultat à $\mathbb{R}$?

3) En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1\geqslant\frac{11}{4}x-3$

4) Montrer alors que $x^2\geqslant 4x-4$

Ex 7-6 : *Position par rapport aux tangentes et inégalités*

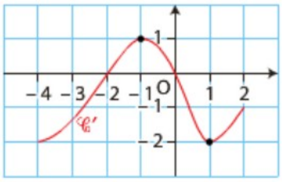
f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère.
1) Rappeler la convexité de f .

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3) En déduire que, pour tout x de $[0;+\infty[$, $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Ex 7-7 : ***Convexité à partir de la courbe représentative de f'***

Dans un repère, on a tracé la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f' dérivable sur un intervalle [−4 ; 2].

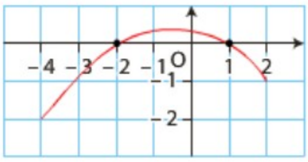


Déterminer, par lecture graphique, la convexité de f .

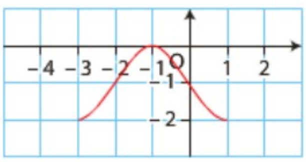
Ex 7-8 :

Dans chacun des cas, déterminer la convexité de la fonction et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1) f est une fonction deux fois dérivable sur [−4 ; 2] dont la dérivée f'' est représentée ci-contre.

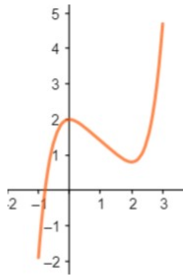


2) g est une fonction deux fois dérivable sur [−3 ; 1] dont la dérivée g'' est représentée ci-contre.

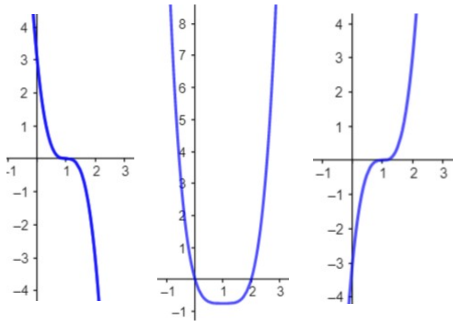


Ex 7-9 : ***Lien entre les représentations graphiques de f et f''***

Dans un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur [−1 ; 3].



Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente celle de la fonction dérivée seconde f'' de f ?



Étude du signe de f'' pour déterminer la concavité

Ex 7-10 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-11 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+2x^3+12x^2-8x-6$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-12 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+1$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-13 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}+7$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
2) En déduire la convexité de f .
3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 7-14 : ***Position par rapport aux tangentes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$.

On note C_f sa courbe dans un repère.
Étudier la position des tangentes à C_f en 4 et en -4 par rapport à la courbe C_f .

Ex 7-15 : ***Famille de fonctions***

Pour tout entier n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x)=\frac{1}{1+e^x}+nx$

On note C_n la courbe représentative de f_n .
Montrer que C_n admet un point d'inflexion pour tout entier n .

Ex 7-16 : ***S'entraîner à la logique***

1) Justifier que les propositions ci-dessous sont fausses à l'aide d'un contre-exemple, éventuellement graphique.

a) Si une fonction n'est pas convexe sur un intervalle I, alors elle est concave sur cet intervalle.

b) Si une fonction f est dérivable et convexe sur un intervalle I, alors sa dérivée f' est positive sur I.

c) Si f est une fonction convexe sur un intervvalle $[a;b]$, telle que $f(a)=f(b)=0$, alors f est positive sur $[a;b]$.

2) Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.
Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'implication énoncée est vraie ou

fausse, puis rédiger sa réciproque et dire si celle-ci est vraie ou fausse.

a) Si la courbe C admet un point d'inflexion, alors la fonction f est convexe, puis concave.

b) Si $f'(x)$ s'annule sur I, alors C admet un point d'inflexion.

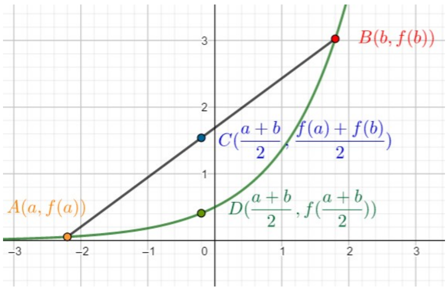
Problèmes

Ex 7-17 : ***Position par rapport aux sécantes et moyenne***

1) En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, compléter les propriétés suivantes que nous allons seulement conjecturer.

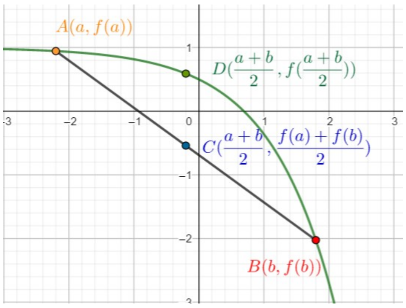
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant$



- Si f est une fonction concave sur un intervalle I, alors :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant$



2) Soit a et b deux réels strictement positifs, tels que $a<b$.
Dans chaque cas, démontrer l'inégalité en étudiant la convexité d'une fonction bien choisie.

a) $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

c) $\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$

d) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

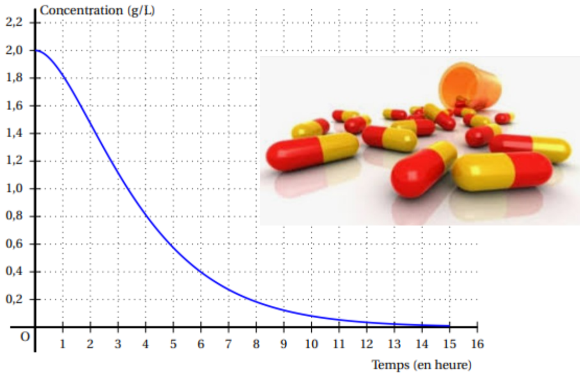
Ex 7-18 : ***Baccalauréat ES Métropole juin 2014 - ex 4***

Concentration d'un médicament : Fonction exp – TVI - Convexité

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?



B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par $f(x) = (x+2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver $((x+2)*\exp(-0.5*x))$
	$\exp(-0.5x)-0.5*\exp(-0.5x)*(x+2)$
2	deriver $(\exp(-0.5*x)-0.5*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2)$
3	factoriser $(-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\exp(-0.5*x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

Ex 19 : *Baccalauréat ES Amérique du sud - novembre 2018 - ex 1*

Taux d'alcoolémie : Fonction exp – TVI – Convexité

f est la fonction définie sur $[0 ; 12]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. a. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 12]$ en le justifiant.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans $[0 ; 12]$.
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 12]$.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ?
Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?