

Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

PrimitivesEx 5-1 : $y' = f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 2$

b) $y' = e^x - 1$

c) $y' = x^2$

2) En déduire les primitives sur \mathbb{R} , des fonctions f , g et h définies par $f(x) = 2$, $g(x) = e^x - 1$ et $h(x) = x^2$ Ex 5-2 : Déterminer les primitivesDans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

2) $f(x) = -\frac{5}{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

3) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}e^x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Ex 5-3 : Déterminer une primitive vérifiant une conditionDans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x) = 3e^x + x^2 + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$ et telle que $F(0) = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 0$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 4$

Ex 5-4 : Primitives de la fonction racine carrée

Démontrer que la fonction F définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction racine carrée f .
En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* .

$$4) f(x) = \frac{x^4}{x^5 + 2} \text{ sur } I = \mathbb{R}^+$$

$$5) f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

Ex 5-5 : Primitives de fonctions composées

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

$$1) f(x) = x^3(x^4 + 1) \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = \frac{3}{2x+1} \text{ sur } I = \mathbb{R}^+$$

$$3) f(x) = 5e^{2x-3} \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*$$

Ex 5-6 : Un cas compliqué

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

2) En déduire les primitives de f sur \mathbb{R} .

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 5-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 3y = 0$

2) $y' + 2y = 0$

3) $2y' - y = 0$

Ex 5-8 : Avec une condition initiale

Soit l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + y = 0$

1) Résoudre l'équation (E_0) .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 5-9 : Découverte d'une propriété fondamentale

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 5$

1) Résoudre l'équation $(E_0) : y' - 2y = 0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(E) : y' - 2y = 5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(E_0) : y' - 2y = 0$, alors $y_0 + y_p$ est solution (E) .

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y - y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E).
Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donnée dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Ex 5-10 : Appliquer la formule du cours

Soit l'équation différentielle (F): $3y' - 2y = \ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F) .

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0)=1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Dans la suite, on pourra utiliser la propriété déjà montrée sur un exemple :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 5-11 :

Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = x^2 - x - 1$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' - y = 0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E) .

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=1$

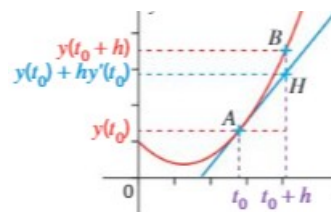
Ex 5-12 : La méthode d'Euler

La modélisation de nombreux problèmes conduit à la résolution d'équations différentielles . Ces équations différentielles sont souvent très difficile à résoudre et il faut alors se contenter de résolutions approchées.
La méthode d'Euler permet d'obtenir point par point la courbe représentative d'une fonction affine par morceaux qui constitue alors une solution approchée de l'équation différentielle.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.

On considère l'équation différentielle $y' = ay + f$ et on note y la solution de l'équation différentielle telle que $y(\alpha) = \beta$, où α et β sont des réels donnés.

L'idée de la méthode repose sur le principe que pour tout réel t_0 , la courbe représentative de y et sa tangente au point d'abscisse t_0 sont presque confondues.



Soit h un réel strictement positif et proche de 0.

On a alors : $y(t_0+h) \approx y(t_0) + h y'(t_0)$

1) En déduire que $y(t_0+h) \approx y(t_0) + h(a y(t_0) + f(t_0))$

2) On considère maintenant l'équation différentielle $y' = y$ avec comme condition initiale $y(0)=1$

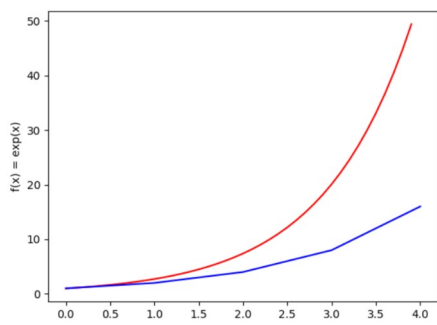
Dans ce cas $a=1$ et f est la fonction nulle.

a) Montrer que $y(0+h) \approx 1+h$

b) Déterminer une approximation de $y(t_0+h)$

3) On considère le programme écrit en python ci-dessous :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 debut = 0
5 fin = 4
6 pas = 0.1
7 x = np.arange(debut,fin,pas)
8 f = np.exp(x)
9 plt.plot(x,f,"r") # trace une courbe rouge
10 plt.xlabel('x')
11 plt.ylabel('f(x) = exp(x)')
12
13 def Euler(h,n):
14     x=0
15     y=1
16     Lx=[x]
17     Ly=[y]
18     for i in range(n):
19         x=x+h
20         Lx.append(x)
21         y=y+h*y
22         Ly.append(y)
23     plt.plot(Lx,Ly,"b")
24     plt.show()
25     return(Lx,Ly)
26 Euler(1,4)
```



a) En partant de $y(0)=y'(0)=1$, montrer que l'on obtient $y(1) \approx 2$, $y(2) \approx 4$ et $y(3) \approx 8$ et placer sur le repère ci-dessus les points A(0;1), B(1;2), C(2;4) et D(3;8).

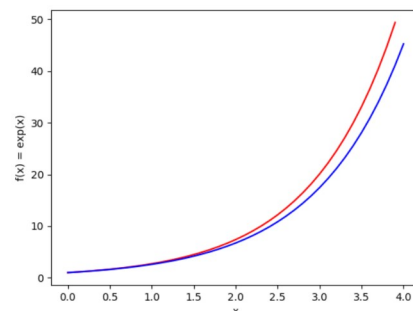
b) Dans la fonction Euler du programme, quelles valeurs a-t-on attribuées à h et à n pour obtenir l'affichage de la courbe bleue ci-dessus ? En déduire le rôle des variables h et n .

c) Déterminer la solution de l'équation $y' = y$ avec la condition initiale $y(0)=1$ et vérifier que sa courbe représentative est la courbe rouge du graphique précédent.

d) Tester la fonction Euler pour différentes valeurs de h et n .

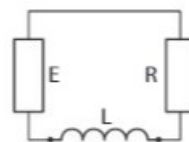
Ci-contre, un exemple

avec $h=0,1$ et $n=40$



Ex 5-13 : Circuit électrique

Un circuit électrique en série comprend un générateur de force électromotrice E , une bobine d'inductance L et une résistance R .



L'intensité du courant électrique i (en ampère) est une fonction du temps t (en seconde) et est solution de l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{1}{5} i'(t) + 100 i(t) = 10 \quad (E)$$

1) Vérifier que la fonction i définie sur \mathbb{R} par $i(t) = -\frac{1}{10} e^{-500t} + \frac{1}{10}$ est la solution cherchée de l'équation différentielle (E) en n'oubliant pas de vérifier la condition initiale.

2) Étudier les variations de la fonction i sur \mathbb{R}^+ , puis tracer le tableau de variations de i , en précisant les limites.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x)=(ax+b)e^{-4x}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $g(x)=(ax+b)e^{-4x}$.

3) Déterminer l'instant t , à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à 0,095 A.
Donner la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-3} .

3) En appliquant la fameuse propriété, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

Ex 5-14 : Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 2y = (2x+5)e^{-4x}$

1) Résoudre l'équation différentielle (E₀): $y' + 2y = 0$.

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=0$

Ex 5-15 : Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée

Soit l'équation différentielle (E): $3y' + y = (4x - 3)e^{\frac{-x}{3}}$

1) Résoudre l'équation différentielle (E₀): $3y' + y = 0$.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (ax^2 + bx)e^{\frac{-x}{3}}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme .

$$g(x) = (ax^2 + bx)e^{\frac{-x}{3}}$$

3) En appliquant la fameuse propriété, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 5$