

Thèmes d'étude :**Modèles définis par une fonction d'une variable****Modèles d'évolution****Primitives****Ex 5-1 :** $y' = f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 2$

b) $y' = e^x - 1$

c) $y' = x^2$

2) En déduire les primitives sur \mathbb{R} , des fonctions f , g et h définies par $f(x) = 2$, $g(x) = e^x - 1$ et $h(x) = x^2$ **Ex 5-2 : Déterminer les primitives**Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

2) $f(x) = -\frac{5}{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$

3) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}e^x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Ex 5-3 : Déterminer une primitive vérifiant une conditionDans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x) = 3e^x + x^2 + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$ et telle que $F(0) = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 0$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 4$

Ex 5-4 : Primitives de la fonction racine carrée

Démontrer que la fonction F définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* .

$$4) f(x)=\frac{x^4}{x^5+2} \text{ sur } I=\mathbb{R}^+$$

$$5) f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \text{ sur } I=\mathbb{R}$$

Ex 5-5 : Primitives de fonctions composées

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

$$1) f(x)=x^3(x^4+1) \text{ sur } I=\mathbb{R}$$

$$6) f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \text{ sur } I=\mathbb{R}_+^*$$

$$2) f(x)=\frac{3}{2x+1} \text{ sur } I=\mathbb{R}^+$$

$$3) f(x)=5e^{2x-3} \text{ sur } I=\mathbb{R}$$

Ex 5-6 : Un cas compliqué

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

2) En déduire les primitives de f sur \mathbb{R} .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0)=1$.

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 5-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) \ y' - 3y = 0$$

$$2) \ y' + 2y = 0$$

$$3) \ 2y' - y = 0$$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 5-9 : Découverte d'une propriété fondamentale

Soit l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 5$

1) Résoudre l'équation $(E_0): y' - 2y = 0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(E): y' - 2y = 5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' - 2y = 0$, alors $y_0 + y_p$ est solution (E) .

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y - y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

Ex 5-8 : Avec une condition initiale

Soit l'équation différentielle $(E_0): 2y' + y = 0$

1) Résoudre l'équation (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E₀), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E). Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donner dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Ex 5-10 : Appliquer la formule du cours

Soit l'équation différentielle (F) : $3y' - 2y = \ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F).

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0) = 1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Dans la suite, on pourra utiliser la propriété déjà montrée sur un exemple :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E₀), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 5-11 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - y = x^2 - x - 1$

1) Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' - y = 0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 1$

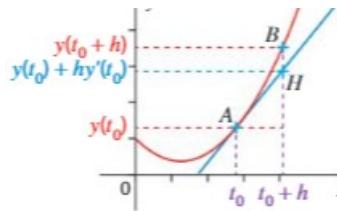
Ex 5-12 : La méthode d'Euler

La modélisation de nombreux problèmes conduit à la résolution d'équations différentielles. Ces équations différentielles sont souvent très difficile à résoudre et il faut alors se contenter de résolutions approchées. **La méthode d'Euler** permet d'obtenir point par point la courbe représentative d'une fonction affine par morceaux qui constitue alors une solution approchée de l'équation différentielle.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.

On considère l'équation différentielle $y' = ay + f$ et on note y la solution de l'équation différentielle telle que $y(\alpha) = \beta$, où α et β sont des réels donnés.

L'idée de la méthode repose sur le principe que pour tout réel t_0 , la courbe représentative de y et sa tangente au point d'abscisse t_0 sont presque confondues.



Soit h un réel strictement positif et proche de 0.

On a alors : $y(t_0 + h) \approx y(t_0) + h y'(t_0)$

1) En déduire que $y(t_0 + h) \approx y(t_0) + h(a y(t_0) + f(t_0))$

2) On considère maintenant l'équation différentielle $y' = y$ avec comme condition initiale $y(0) = 1$

Dans ce cas $a = 1$ et f est la fonction nulle.

a) Montrer que $y(0+h) \approx 1+h$

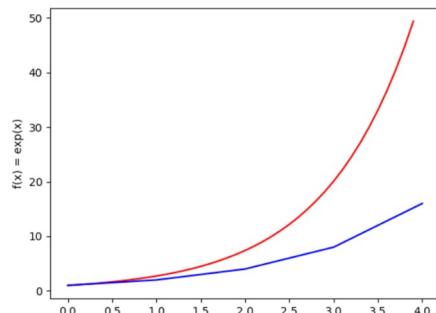
b) Déterminer une approximation de $y(t_0+h)$

3) On considère le programme écrit en python ci-dessous :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 debut = 0
5 fin = 4
6 pas = 0.1
7 x = np.arange(debut,fin,pas)
8 f = np.exp(x)
9 plt.plot(x,f,"r") # trace une courbe rouge
10 plt.xlabel('x')
11 plt.ylabel('f(x) = exp(x)')
12
13 def Euler(h,n):
14     x=0
15     y=1
16     Lx=[x]
17     Ly=[y]
18     for i in range(n):
19         x=x+h
20         Lx.append(x)
21         y=y+h*y
22         Ly.append(y)
23         plt.plot(Lx,Ly,"b")
24         plt.show()
25     return(Lx,Ly)
26 Euler(1,4)

```

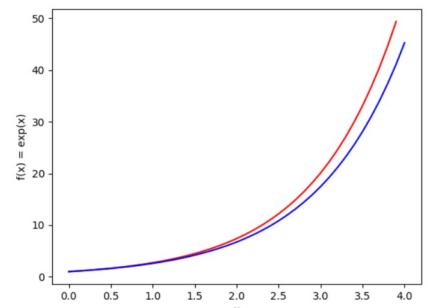


a) En partant de $y(0) = y'(0) = 1$, montrer que l'on obtient $y(1) \approx 2$, $y(2) \approx 4$ et $y(3) \approx 8$ et placer sur le repère ci-dessus les points A(0;1), B(1;2), C(2;4) et D(3;8).

b) Dans la fonction Euler du programme, quelles valeurs a-ton attribuées à h et à n pour obtenir l'affichage de la courbe bleue ci-dessus ? En déduire le rôle des variables h et n .

c) Déterminer la solution de l'équation $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ et vérifier que sa courbe représentative est la courbe rouge du graphique précédent.

d) Tester la fonction Euler pour différentes valeurs de h et n .

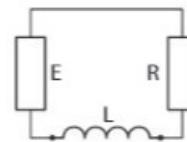


Ci-contre, un exemple

avec $h=0,1$ et $n=40$

Ex 5-13 : Circuit électrique

Un circuit électrique en série comprend un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique i (en ampère) est une fonction du temps t (en seconde) et est solution de l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{1}{5}i'(t) + 100i(t) = 10 \quad (\text{E})$$

1) Vérifier que la fonction i définie sur \mathbb{R} par $i(t) = -\frac{1}{10}e^{-500t} + \frac{1}{10}$ est la solution cherchée de l'équation différentielle (E) en n'oubliant pas de vérifier la condition initiale.

2) Étudier les variations de la fonction i sur \mathbb{R}^+ , puis tracer le tableau de variations de i , en précisant les limites.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x)=(ax+b)e^{-4x}$.

3) Déterminer l'instant t , à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à 0,095 A.

Donner la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-3} .

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $g(x)=(ax+b)e^{-4x}$.

Ex 5-14 : Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 2y = (2x+5)e^{-4x}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' + 2y = 0$.

3) En appliquant la fameuse propriété, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=0$

Ex 5-15 : Recherche d'une solution particulière sous une forme donnée

Soit l'équation différentielle $(E): 3y' + y = (4x - 3)e^{\frac{-x}{3}}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): 3y' + y = 0$.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (ax^2 + bx)e^{\frac{-x}{3}}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme .

$$g(x) = (ax^2 + bx)e^{\frac{-x}{3}}$$

3) En appliquant la fameuse propriété, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0)=5$