3 : Calculs de dérivées : rappels et compléments : exercices - page 1

corrections : http://pierrelux.net

Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Modèles d'évolution

Calculs d'aires

Nombre dérivé d'une fonction en « un point »

Ex 3-1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

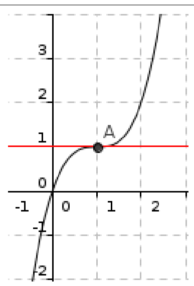
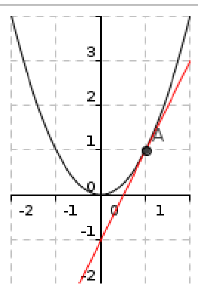
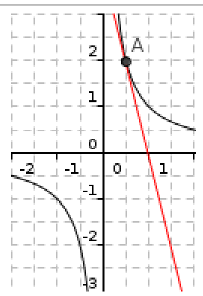
2) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a .

3) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un réel a .

4) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

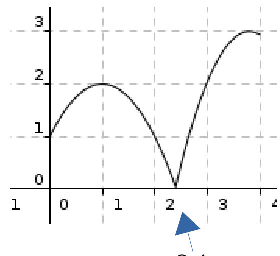
Ex 3-2 : ***Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.***

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 3-3 : ***QCM : restituer les notions du cours***

Soit f la fonction définie sur [0;4] représentée ci-dessous :



1) Au point d'abscisse 1 :
a) f n'est pas dérivable
b) f est dérivable et $f'(1)=0$
c) f est dérivable et $f'(1)=2$

2) Au point d'abscisse 2,4 :
a) f n'est pas dérivable
b) f est dérivable et $f'(2,4)=-1$
c) f est dérivable et $f'(2,4)=1$

3) Au point d'abscisse 0 :
a) f n'est pas dérivable
b) f est dérivable et $f'(0)\approx 2$
c) f est dérivable et $f'(0)\approx 1$

Ex 3-4 : ***Calculer le nombre dérivé***

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f : x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

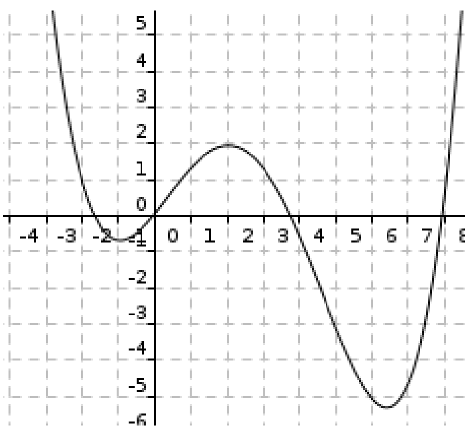
3) $f : x \longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$

4) $f : x \longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f : x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

Ex 3-5 : ***Signe du nombre dérivé***

La courbe représentative d'une fonction dérivable a été tracée ci-dessous.



Déterminer graphiquement le signe (ou l'éventuelle nullité) des réels suivants :

a) $f'(-3)$ b) $f'(1)$

c) $f'\left(\frac{4}{5}\right)$ d) $f'(2)$

e) $f'(5)$ f) $f'\left(\frac{50}{7}\right)$

Calculs de dérivées

Ex 3-6 : ***Calculs de dérivées et forme kf***

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

1) $f : x \longmapsto 3x^3-2x^2+2x+5$ et $g : x \longmapsto \dfrac{3x^3-2x^2+2x+5}{2}$

2) $f : x \longmapsto (x-2)\times(x-4)$ et $g : x \longmapsto \dfrac{3(x-2)\times(x-4)}{4}$

3) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto 5x\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{7}{x^2+3}$

<u>Ex 3-7 :</u> ***Avec les nouvelles formules***

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

a) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

b) $f : x \longmapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$

c) $f : x \longmapsto (x^2-1)\sqrt{x}$

d) $f : x \longmapsto 5(3x-2)^2$

e) $f : x \longmapsto (x-3)(x^4+1)$

f) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-7}$

g) $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+5}$

On peut aussi utiliser la formule générale : $(f(u(x)))' = u'(x) f'(u(x))$

h) $f : x \longmapsto \left(\frac{1}{x}+x\right)^3$

<u>Ex 3-8 :</u> ***Avec la fonction exp***

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

a) $f(x) = 4x^3 - 2e^x$

b) $f(x) = -xe^x$

c) $f(x)=(4x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

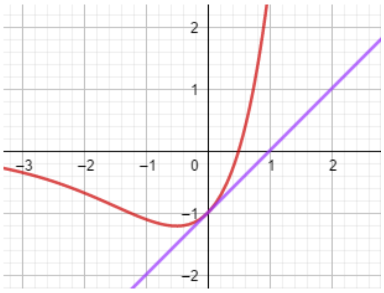
e) $f(x)=3\mathrm{e}^{x^3-1}$

f) $f(x)=\dfrac{2-3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Tangentes

Ex 3-9 : ***Déterminer a et b***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^x$ où a et b sont deux réels . On note C sa courbe représentative et T la tangente au point d'abscisse 0.



1) Lire graphiquement la valeur de $f(0)$.

2) En déduire la valeur de b .

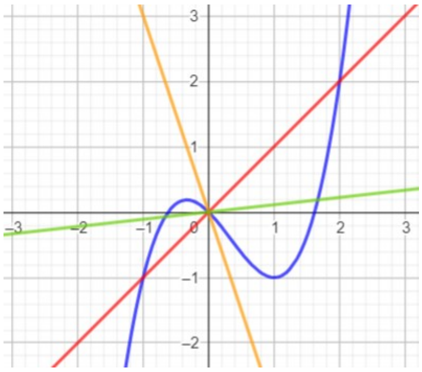
3) Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$.

4) Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de a .

Ex 3-10 : ***Tangente parallèle à une droite donnée***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-x$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1) Déterminer la fonction dérivée de f .

2) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer lorsqu'elles existent, toutes les tangentes à C_f parallèles à la droite proposée .

Lorsqu'elles existent, préciser l'équation de ces tangentes, puis tracer les sur le graphique ci-dessus.

a) $d_1 : y=0$ b) $d_2 : y=x$ c) $d_3 : y=-3x$ d) $d_4 : y=\frac{1}{9}x$

Dérivées, variations et extrema

Ex 3-11 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Si une fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est négative.

2) Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est nulle, alors f est constante.

3) Si f est une fonction dérivable en a telle que $f'(a)=0$, alors f admet un maximum local en a.

4) Une fonction f admet un maximum local en 3 sur $[1;4]$ s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[$ inclus dans $[1;4]$ et contenant 3 tel que pour tout x appartenant à $]a;b[$, on a $f(x)\leqslant f(3)$.

5) Si une fonction f admet un maximum local en a, alors f est dérivable en a.

Ex 3-12 : ***Déterminer les variations d'une fonction***

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations (sans les limites) de f sur I, puis déterminer les éventuels extrema de f.

1) $f : x \longmapsto e^{x^5}+1$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

2) $f : x \longmapsto \sqrt{4x^2-1}$, $\mathrm{I}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f : x \longmapsto x+\frac{3}{x}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}^*$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{2-x}$, $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

6) $f : x \longmapsto e^{x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+4}$, $I = \mathbb{R}$

7) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}-x$, $I = [1;+\infty[$

Ex 3-13 : ***Montrer des inégalités***

Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, chacune des inégalités proposées sur l'intervalle I.

1) $\frac{1}{1-x} \leqslant x-3$, $\mathrm{I}=[2;+\infty[$

Aide : faire le tableau de variation sur I de la fonction

$$d : x \longmapsto \frac{1}{1-x}-(x-3)$$

2) $x^2 \geqslant x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, $\mathrm{I}=]0;4]$

Ex 3-14 : ***Trouver une fonction vérifiant des conditions***

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction (ou d'une représentation graphique de fonction) vérifiant la ou les conditions(s) proposée(s) :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est négative sur $\mathbb{R}$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^*$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un maximum local en 4.

6) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Ex 3-15 : ***Position relative d'une courbe et d'une tangente en un point***

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-2x$

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

2) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au point A d'abscisse 1.

3) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x-2$.

a) Montrer que $f(x)-g(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b) Étudier le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$.

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

<u>Ex 3-16 :</u> ***Position relative de deux courbes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x+1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $g(x)=-\dfrac{1}{x+2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g .

1) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Développer $(x+1)^2(x+3)$

b) Étudier le signe de $h(x)$.

c) Déterminer la position relative de C_f par rapport à C_g .

4) Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection . Donner une équation de cette tangente.

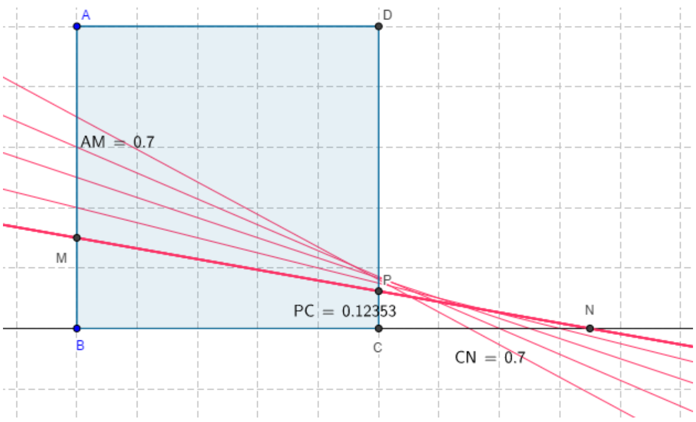
Ex 3-17 : ***Équations***

1) Justifier que l'équation $x^5-2x^3+3x-20=0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

2) Avec la calculatrice, donner un encadrement de α .

Problèmes et algorithmes

Ex 3-18 : ***Distance maximale***



On place le point N tel que CN=AM sur la demi droite [BC) à l'extérieur du segment [BC].

La droite (MN) coupe (DC) en P . On pose $AM=x$ avec $0\leqslant x\leqslant 1$.

Le but de l'exercice est de trouver M sur [AB] tel que la distance PC soit maximale.

1) Démontrer que $\text{PC}=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

2) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;1] par

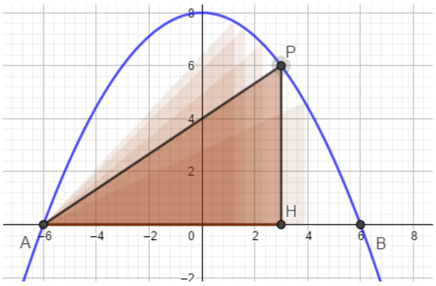
$f(x)=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.

Ex 3-19 : ***Parabole et aire maximale***

La parabole d'équation $y=-\dfrac{2}{9}x^2+8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $\text{P}(x\,;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.



Le but du problème est de déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle AHP soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que $f(x)=-\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{2}{3}x^2+4x+24$

3) Étudier les variations de f.

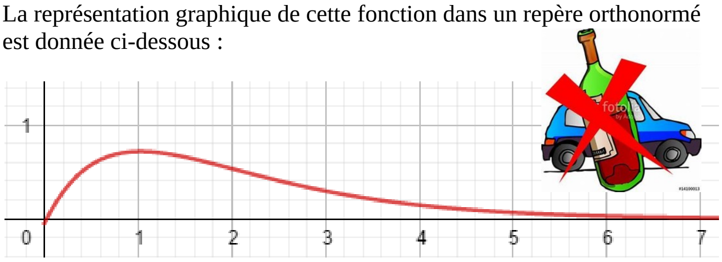
4) Répondre au problème posé.

Ex 3-20 : ***Taux d'alcoolémie***

Un étude sur un jeune homme de 64kg ayant ingéré une dose de 33g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans le sang, en fonction du temps t en heure, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=(2t-0,05)e^{-t}$$

La représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



1) Avec la précision permise par le graphique, déterminer combien de temps après l'ingestion le taux d'alcool passe au-dessous du seuil de 0,25 $g.L^{-1}$

2) Un taux d'alcool dans le sang inférieur à 0,001 $g.L^{-1}$ est considéré comme négligeable.
En utilisant la calculatrice ou un programme écrit en python, déterminer à partir de combien de temps (à 10^{-2} près) le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est négligeable ?

3) Déterminer le tableau de variation de f .

4) En déduire une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang du jeune homme.

Ex 3-21 : ***Décroissance radioactive***

On étudie une population de noyaux radioactifs de carbone 14 au cours du temps.
À l'instant $t=0$, la population est composée de N_0 noyaux radioactifs de carbone 14.
On modélise le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant t , exprimé en milliers d'années, par la fonction N définie sur $[0;+\infty[$ par :
$N(t)=N_0 e^{-0,121\,t}$

1) Étudier les variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$.

2) a) On appelle demi-vie du carbone 14 le temps T au bout duquel la population de noyaux radioactifs a diminué de moitié.
Justifier que $e^{-0,121\,T}=\dfrac{1}{2}$

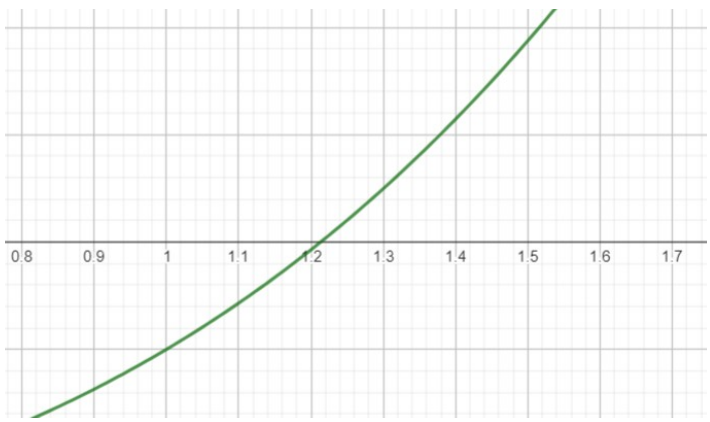
b) Déterminer avec un programme écrit en python une valeur approchée au millième de la demi-vie T du carbone 14.

3) a) Démontrer que $N(2\,T)=\dfrac{N_0}{4}$

b) En déduire au bout de combien de temps le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 n'est plus égal qu'au quart de sa valeur initiale.

Ex 22 : ***Méthode de Newton-Raphson***

1) **Introduction :**
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On montre facilement grâce au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont nous allons déterminer une valeur approchée par la méthode de la sécante.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\dfrac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .

Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 .

T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 .

Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et telle que la dérivée ne s'annule pas.

On note C_f sa courbe représentative et x_0 un réel.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir la suite (x_n) des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$. Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n=10$.

```
from math import *
N=int(input("N="))
x_0=float(input("x_0="))
def f(x):
    return (……………...)
def f_prime(x):
    return (……………...)
def MethodeNewton(x_0, N):
    x=……………...
    for i in range(……………...):
        x.append(……………...……………………)
    return x
print(MethodeNewton(x_0,N))
```

Tester ce programme pour différente valeur de x_0 . Que constatez-vous ?

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
from math import *
x_0=float(input("x_0="))
p=float(input("p="))
def f(x):
    return (……………...)
def f_prime(x):
    return (……………...)
def MethodeNewton(x_0,p):
    x=……………...
    i=……………...
    x.append(x[0] - f(x[0])/f_prime(x[0]))
    while (……………...……………...>p):
      i=……………...
      x.append(……………...……………...)
    return x
print(MethodeNewton(x_0,p))
```

3) **Application :**

Déterminer les fonctions à utiliser pour déterminer avec ce programme des valeurs approchées à 10^{-10} près de π , e , $\sqrt{2}$ et du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de $x^2=x+1$), puis déterminer ces valeurs approchées.

<u>Attention :</u>
Dans le cas où l'équation $f(x)=0$ admet plusieurs solutions, il faut choisir une valeur de x_0 proche de la solution attendue, afin que l'algorithme converge bien vers cette solution.
Il faut aussi tout faire pour que la dérivée ne s'annule pas …
Visualiser la méthode de Newton avec GeoGebra :
https://pierrelux.net/documents/cours/1_2019/pdf/6_application_derivation/newton.html