

Thèmes d'étude :**Modèles définis par une fonction d'une variable****Limites de fonctions****Ex 2-1 : Vrai ou faux**

1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors :

a) Il existe un réel x tel $f(x) > 10^9$

b) Pour tout réel A , il existe un réel m , tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$

c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x > m$, alors $f(x) > A$

d) $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $x > m \Rightarrow f(x) > 10^4$

2) Si f est croissante sur \mathbb{R}^+ , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -0,001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m; +\infty[$ sur lequel f est strictement négative.

4) Si f est strictement positive sur \mathbb{R} , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Ex 2-2 : Comprendre la définition

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle ... finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \dots$ »

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Ex 2-3 : Conjecturer une limite – piéger la calculatrice

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto 10^{-3}x^2 - 10^2x$

2) $g : x \mapsto \frac{3x^2 - 2}{10^3x - 4}$

3) $h : x \mapsto 10x^3 - 0,01x^4$

Ex 2-4 : Limite et position relative par rapport à une droite

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y=1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Limite en a (avec a réel)

Ex 2-5 : Comprendre la définition

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle ... finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \dots$ »

a) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

Ex 2-6 : Vrai ou faux

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors $d: y = -1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors $d: y = -1$ est asymptote verticale à C .

3) Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors $d: x = -1$ est asymptote verticale à C .

Ex 2-7 : Conjecturer une limite

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1 , si elle existe, de $f: x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9 , si elle existe, de $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

Ex 2-8 : Asymptotes

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe C .

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$

Opérations sur les limites

Ex 2-9 : Vrai ou faux

1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ex 2-10 : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + x + \frac{1}{x} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + 3x \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + 3x \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{6 - 3x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + 1 + \frac{1}{x^2} \right)$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - x^2)(2x - 4)$

7) $\lim_{x \rightarrow 4+} \left(3x - 1 + \frac{1}{x-4} \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$

9) $\lim_{x \rightarrow 2+} \left(4 - x^2 + \frac{4}{4 - x^2} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - \frac{2}{1 - 2x} \right)$

Ex 2-11 : Formes indéterminées

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = -\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$

c) $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 2-12 : Logique

Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R}_+ . On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = 0$, il faut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

2) Pour que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = 0$, il suffit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Ex 2-13 : Fonctions polynômes

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

Cette propriété, très pratique, n'est plus au programme. C'est tout de même un outil qui permet de conclure très rapidement pour orienter votre démarche ou pour rejeter un résultat erroné.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme

$$P(x) = -8x^3 + 14x^2 + 8x + 4$$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

a) $Q(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{x^3}{2}$

b) $R(x) = 1 - 4x + 5x^2$

Ex 2-14 : Fonctions rationnelles

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

Cette propriété, très pratique, n'est plus au programme. C'est tout de même un outil qui permet de conclure très rapidement pour orienter votre démarche ou pour rejeter un résultat erroné.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x^2-5}$$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :

a) $g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 5}{2x^3 - 5}$

b) $h(x) = \frac{(x-5)^4}{(3x^2-5)^2}$

Ex 2-15 : Asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Ex 2-16 : Déterminer a , b et c ...

Soit $f: x \mapsto a + \frac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	-1	-4	$-\infty$	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner.

2) À partir de l'expression $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f .

Ex 2-17 : Lever l'indéterminée

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x+2}$$

Ex 2-18 : Limite d'une fonction composée

Déterminer intuitivement, les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$$

Ex 2-19 : Théorèmes de comparaison

Les théorèmes de comparaison non détaillés en maths complémentaires sont identiques (en adaptant les limites) à ceux vus pour les suites.

Soit f la fonction définie sur $[5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geq 5$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leq x-5 \leq x$)

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Continuité : maîtriser le cours

Ex 2-20 : Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Si f est continue sur I , alors :

1) On peut tracer une tangente non verticale en tout point de C .

2) f est une fonction qui ne change pas de sens de variation.

3) C se trace sans lever le crayon.

4) L'intervalle I est fermé.

5) La fonction inverse est continue sur $] -\infty; 0[$

6) La fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} .

7) La fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}^+ .

Justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle

Ex 2-21 :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I indiqué.

1) $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$ sur $I =]-\infty; 3[$

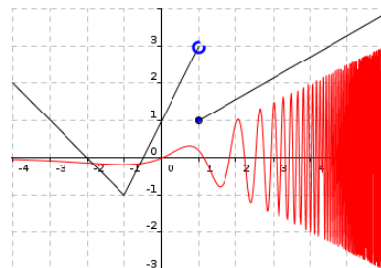
2) $f : x \mapsto 2e^x + \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$

3) $f : x \mapsto \frac{3x^3}{1-3x}$ sur $I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$

Continuité et représentation graphique

Ex 2-22 :

1) Déterminer graphiquement si les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous sont continues sur l'intervalle $[-4; 6]$.



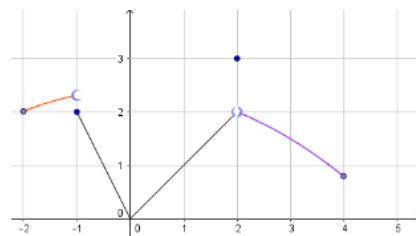
2) Représenter avec un traceur de courbes la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} . f \text{ est-elle continue sur }]0; 1] ?$$

Essayer de tracer f à la main sans lever le crayon. Que peut-on conclure ?

Ex 2-23 :

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.



1) La fonction f est-elle dérivable en -1,5 :

en 0 :

en 2 :

2) La fonction f est-elle continue sur $[-2; 2]$:

sur $[-2; -1]$:

sur $[-2; -1[$:

3) Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

La fonction f est-elle continue en 2 ?

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et corollaire du TVI

Le corollaire du TVI et aussi appelé théorème des bijections

Ex 2-24 : Maîtriser le cours - Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1) Si f change de signe sur I , alors f s'annule sur I .

2) Si $I=[a;b]$, $f(a)f(b)>0$ et f est continue sur I , alors f s'annule sur I .

3) Si f s'annule une unique fois sur I et f est strictement monotone sur I , alors f est continue sur I .

4) Si f s'annule une unique fois sur I et f est continue sur I , alors f est strictement monotone sur I .

Ex 2-25 : Utiliser nSolve(), Equations ...

1) a) Montrer que l'équation (E): $\frac{x^3}{x+1}=8$ admet au moins une solution sur $[-4;-1,5]$.

b) Vérifier avec la calculatrice ou un ordinateur et essayer en utilisant un outil de résolutions numériques approchées d'équations (Xcas, Ti-Nspire, NumWorks ...): de donner des valeurs approchées de toutes les solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ de l'équation (E)

Ces outils fournissent une valeur approchée par la méthode de Newton-Raphson ou par la méthode de la sécante. Certains des ces outils retournent une unique solution, d'autres quelques solutions ou même parfois ne retournent rien du tout (plus exactement, retournent

'false'), voire retournent un résultat erroné dans les (rares) cas où la méthode utilisée ne converge pas.

Suivant l'outil utilisé (Xcas : nSolve(), Ti-Nspire : nSolve(), NumWorks : Equations ...), il est possible de préciser l'intervalle sur lequel la solution est cherchée.

Remarque :

Solve() de Xcas ou de la Ti-Nspire CAS est une fonction de calcul formel.

Elle cherche à appliquer divers algorithmes permettant de résoudre certains types d'équations prédéfinis (équations linéaires, du 2nd, du 3ème ou du 4ème degré, équation avec des racines carrées se ramenant aux types précédents, équations avec des 'cos' et 'sin', etc.)

Je ne conseille pas d'utiliser cette fonction car les résultats retournés sont parfois très difficiles à comprendre pour un élève de lycée et ne correspondent pas du tout à l'attendu de l'exercice proposé.

2) Montrer que l'équation (E): $5xe^{-x}=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Ex 2-26 : Signe de $f(x)$

Soit f une fonction définie et continue sur \mathbb{R} telle que :

- Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -4 et 3.
- Les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont -9 et 4
- $f(0)=2$

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-27 : Signe de $f(x)$

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 3	\nearrow $+\infty$	\searrow $-\infty$

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $] -\infty;0[$?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]0;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-28 : Signe de $f(x)$

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 4	\searrow $-\infty$	\searrow 0

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $] -\infty;3[$?
 A quel intervalle appartient chacune d'elle ?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]3;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

3) Déterminer le signe de f .

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Ex 2-29 : $f(x)=k$: discussion suivant les valeurs de k

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		3		1
		\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow
		-2		-1	

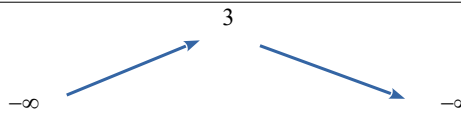
1) Déterminer les extrema de f .

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur \mathbb{R} ?

Ex 2-30 : Tableau de variation de f à partir du tableau de variation de f'

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , dont la fonction dérivée f' (f' étant continue) admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-\infty$	3	$-\infty$



Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f .