Thèmes d'étude :

Modèles d'évolution
Modèles définis par une fonction d'une variable

Comportement global d'une suite

Ex 1-1 : ***Vrai ou faux***

1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.

2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$

4) Si $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$, alors (u_n) est décroissante.

5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

6) Si pour tout entier n , $0 < u_n \leqslant 4$, alors :
a) (u_n) est minorée par 4 .

b) (u_n) est minorée par 0

c) (u_n) est minorée par 1.

d) 5 est un majorant de (u_n)

e) (u_n) est bornée.

f) (u_n) admet une infinité de majorants.

7) Une suite est toujours soit minorée, soit majorée.

8) Un majorant d'une suite est toujours un terme de la suite.

9) Une suite croissante est toujours minorée.

10) Une suite minorée est toujours croissante.

11) Une suite croissante n'est pas majorée.

12) Si pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant n+1$
a) (u_n) est minorée.

b) (u_n) est majorée.

c) (u_n) est monotone.

13) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.
a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.

c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.

d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

14) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

15) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n) .

Ex 1-2 : ***Déterminer*** u_{n+1} ***en fonction de*** u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.

1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égal à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+5}{4x+1}$

5) $u_n = 7^{n-3}$

6) $u_n = 2n-5$

7) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

8) $u_n=\frac{1}{n+1}$

9) $u_0=8$, $u_1=10$, $u_2=13$, $u_3=17$, $u_4=22$ …

10) $u_0=1$, $u_1=5$, $u_2=21$, $u_3=85$ ...

Ex 1-3 : ***Étudier la monotonie***

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-3n+5$

2) $u_n=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$

4) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n$

5) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

6) $u_n = \dfrac{n^2}{3^n}$

7) $u_n = n^3 - 12n^2 + 45n$ (Aide : étudier une fonction)

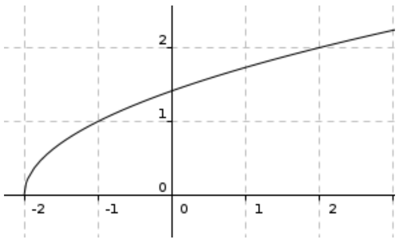
8) $u_n = \dfrac{n^2 - 4}{n^2 + 1}$ (Aide : étudier une fonction)

9) (u_n) est la suite des coefficients directeurs des droites d_n d'équation $3x - ny + 5n = 0$

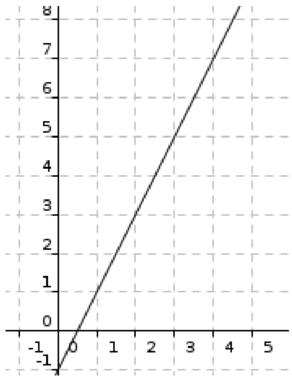
Ex 1-4 : Représenter graphiquement une suite définie par récurrence

Dans chaque cas, on considère la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. À l'aide de la droite $d : y = x$, représenter les premiers termes de la suite sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).

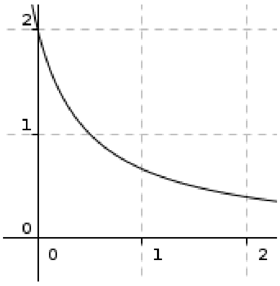
1) $u_0 = -1{,}5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$



2) $u_0 = 1{,}5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$



3) $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n+0,5}$



Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 1-5 : ***Vrai ou faux***

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$

2) Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers L.

3) Si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$, où $A\in\mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers + ∞ .

4) Si tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$, où $B\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d’un certain rang, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.

6) Une suite peut avoir plusieurs limites.

7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est + ∞ ou - ∞ .

Ex 1-6 : ***Suite positive à partir d'un certain rang***

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

Opérations sur les limites

Ex 1-7 : ***Utiliser les opérations sur les limites***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=-2n^2+\dfrac{e}{n}$

2) $u_n=300-n^2\sqrt{2}$

3) $u_n=\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(5-\frac{1}{n^3}\right)$

4) $u_n=\frac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$

5) $u_n=\frac{n+2}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3}$

6) $u_n=\frac{2+\frac{3}{n}}{5-\frac{2}{n^2}}$

7) $u_n=\frac{5n^2}{10-\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right)}$

Ex 1-8 : ***Lever une indétermination***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\frac{n^5}{5}-\frac{n^2}{2}-\mathrm{e}$

2) $u_n=\frac{1}{2}n^4-2n^3+5n^2-\frac{1}{4}$

3) $u_n=\frac{n^2-3n+1}{n^2+4}$

4) $u_n=\frac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$

5) $u_n = \sqrt{n} - n$

6) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$

7) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Ex 1-9 : ***Trouver des suites***

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite + ∞ telles que :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = -\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 1$

d) $u - v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$, telles que :

a) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n)=+\infty$

b) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n)=0$

c) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n)=1$

d) uv n'a pas de limite.

<u>Ex 1-10 :</u> ***Raisonnement par l'absurde***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente . Soit (w_n) la suite définie par $w_n=u_n+v_n$.

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+\frac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

<u>Limites et comparaison</u>

<u>Ex 1-11 :</u> ***Théorème de comparaison ou d'encadrement***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\frac{3\sin(n)}{n^2}$

2) $u_n=\frac{3+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$

3) $u_n = 3(-1)^n + n$

4) $u_n = \dfrac{2\cos(n)}{n} + \dfrac{\sin(n)}{2n}$

5) $u_n = \dfrac{5n + (-1)^{n+1}}{2n + (-1)^n}$

6) $u_n = -3n^3 + 3\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Ex 1-12 : ***Passage à la limite***

On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n , $v_n \leqslant \frac{-n+1}{n+4}$

On suppose que la suite (v_n) est convergente.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} v_n \leqslant -1$

Limite d'une suite géométrique

Ex 1-13 :

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

2) $u_n = 1{,}00001^n$

3) $u_n = 3 + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

4) $u_n = \left(-\frac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

6) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

7) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n=\dfrac{e^n-4^n}{4^n-1}$

9) $u_n=\dfrac{2^{n+1}+5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 1-14 : ***Nombre rationnel***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=3,777777$ … (n chiffres 7)
$u_1=3,7$, $u_2=3,77$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que 2,47474747… est un nombre rationnel.

<u>Les grands classiques déjà vus en première</u>
<u>Suites arithmético-géométriques et suites homographiques</u>

<u>Ex 1-15 :</u>

On considère la suite arithmético-géometrique (u_n) définie par
$\begin{cases} u_{n+1}=0{,}5u_n+1{,}5 \\ u_0=1 \end{cases}$

1) Représenter graphiquement les 4 premier termes de la suite (u_n) .

2) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

3) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le terme de rang n de la suite (u_n) .

```
def u(n):
    u= ……….
    for i in range ( ….. , ….. ):
        u=……….
    return ……….
```

4) En utilisant la fonction Python ci-dessus, retrouver le résultat conjecturé à la question 2.

<u>Ex 1-16 :</u> **Suite arithmético-géométrique**
Utiliser une suite auxiliaire géométrique

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+3 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

2) À l'aide de l'outil de votre choix (calculatrice, python, tableur):
a) Déterminer une valeur approchée de u_{15} à 10^{-6} près.

b) Que remarque-t-on lorsque l'on soustrait 6 à chaque terme de la suite u ?

3) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-6$.
a) Démontrer que v est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Retrouver alors u_{15} .

4) Calculer $S=\sum_{i=0}^{20} v_i$ et $T=\sum_{i=0}^{20} u_i$

Ex 1-17 : Suite homographique

Situation 1 : utiliser une suite auxiliaire arithmétique

Remarque :
Une suite homographique est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1}=\frac{a u_n+b}{c u_n+d}$ avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$.

1) Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .
On admet que la suite prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que la suite est arithmétique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

c) Justifier les conjectures de la question 1).

3) a) Compléter la fonction python ci-dessous permettant de déterminer le plus petit indice n tel que $u_n < 10^{-p}$

```
def seuil(p):
    u=........
    n=........
    while u>=10**(........):
        u=........
        n=n+1
    return n
```

b) Utiliser cette fonction pour déterminer le plus petit indice n tel que $u_n < 0,01$.

<u>Ex 1-18 :</u> Suite homographique
Situation 2 : utiliser une suite auxiliaire géométrique

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{4 + u_n} \end{cases}$

et la suite (v_n) définie tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :
Quelles formules ont été saisies dans les cellules B3 et C2 puis tirées vers le bas :

En B3 :

En C2 :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	0	-0,33333333
3	1	0,75	-0,06666667
4	2	0,947368	-0,01333333
5	3	0,989362	-0,00266667
6	4	0,997868	-0,00053333
7	5	0,999573	-0,00010667
8	6	0,999915	-2,1333E-05
9	7	0,999983	-4,2667E-06
10	8	0,999997	-8,5333E-07
11	9	0,999999	-1,7067E-07

b) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

c) En calculant quelques quotients $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, conjecturer la nature de la suite (v_n) .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une expression de v_n en fonction de n .

c) Exprimer u_n en fonction de v_n .

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3-3\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

Ex 1-19 : **Avec des listes**

algorithme a

```
n=int(input("n="))
u=[ ]
for i in range(0,n+1):
    u.append(2*i**2-3*i+1)
print (u)
```

algorithme b

```
n=int(input("n="))
u0=float(input("u0="))
u=[u0]
for i in range(1,n+1):
    u.append(2*u[i-1]**2-3*u[i-1]+1)
print (u)
```

Déterminer le rôle de ces deux algorithmes.

Ex 1-20 : **Somme de termes consécutifs**

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3,1 et de premier terme $u_0=2,7$. Pour calculer $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, on utilise la fonction incomplète écrite en python ci-dessous :

```
1 def somme1(n):
2     U=2.7
3     S=.........
4     for i in range(1,.........):
5         U=U+3.1
6         S=.........
7     return(.........)
```

a) Compléter cette fonction.
b) Que saisir en ligne 8 ou dans la console pour obtenir la somme S_{21} ?

2) On considère la fonction écrite en python ci-dessous :

```
1 def somme2(u0,r,M):
2     T=0
3     U=u0
4     while U<=M:
5         T=T+U
6         U=U+r
7     return(T)
```

Que saisir en ligne 8 ou dans la console pour obtenir la somme $T=10+13+16+\ldots+145$? Déterminer cette somme.

3) Ecrire une fonction somme3(u0,q,M) permettant de calculer la somme $R=6400+3200+1600+\ldots+25$, puis déterminer cette somme en écrivant print(somme3(6400,1/2,25)).

Ex 1-21 : Algorithme de seuil – proportion de filles

Un concours scientifique est organisé depuis 2021.
Les filles ne représentaient alors qu'un quart des participants .
Entre 2021 et 2025, on a constaté une augmentation moyenne annuelle de la proportion des filles participant à ce concours de 12 %.
On extrapole que la proportion de filles va continuer de progresser ainsi pendant 10 ans.

1) a) Quelle était la proportion de filles en 2022.

b) Pour tout entier naturel n , on note p_n la proportion de filles de l'année $2021+n$.
Pour $n<10$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .

c) En déduire la nature de la suite (p_n) .

2) On considère la fonction Proporfilles écrite en python ci-dessous :

```
def Proporfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2021
```

Quelle est la valeur de Proporfilles(0,5) ? Interpréter ce résultat.