

LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite (u_n) , c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

1) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n) .

cas 1

Intuitivement, si « u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et « si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, « les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L ».

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1, cas 2, cas 4)

2) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.

Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais ... comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.

On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées. Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

• Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où k est un réel donné)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 5n^2$

On a $w_n = 5u_n$ où $u_n = n^2$

Comme $5 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

• **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

On a $w_n = u_n + v_n$ où $u_n = 5n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on en déduit par somme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

• **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

On a $w_n = u_n \times v_n$ où $u_n = -n^2$ et $v_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, on en déduit par produit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$

• **Limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, (v_n) garde un signe constant.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant négative.

Exemple : Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = \frac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ où $u_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$, on en déduit par quotient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

3) LIMITES ET COMPARAISON

Propriétés : Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI)

Soit deux suites (u_n) et (v_n) .
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exemple : Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n - (-1)^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq -(-1)^n$, donc $n - 1 \leq n - (-1)^n$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - (-1)^n) = +\infty$

Propriété : Passage à la limite

Soit deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent respectivement vers L et L' .
On suppose que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
On a alors $L \leq L'$.

Si une suite (u_n) converge vers L et si pour tout entier naturel n ,
 $u_n \leq k$ ($k \in \mathbb{R}$), alors $L \leq k$.

Remarque : Si dans la propriété précédente, on remplace $u_n \leq v_n$ par $u_n < v_n$, la conclusion reste $L \leq L'$.

Exemple : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel n , on a $u_n < v_n$.

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$.
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) SUITES ARITHMÉTIQUES

Propriété :

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GÉOMÉTRIQUES

Propriété :

Soit q un réel.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieure à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : On en déduit facilement le cas général $u_0 q^n \dots$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on applique la formule suivante :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 5 \times 2^n$

$$\text{On a } S_n = 5 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 5 \times 2^{n+1} - 5$$

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , telle que $0 < q < 1$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$$

Preuve :

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ car $0 < q < 1$, donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - q^{n+1}) = 1$ et par produit, puis quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$

5) SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Définition :

Une suite arithmético-géométrique (u_n) est une suite définie, pour tout entier naturel n , par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$, où a et b sont deux réels.

Remarques :

- Si $a = 0$, la suite est constante et égale à b .
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b .
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, la suite est géométrique de raison a .

Représentation graphique :

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 10$ et $u_0 = 1$. On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 10$

Étape 1 : On trace la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 10$

Étape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$

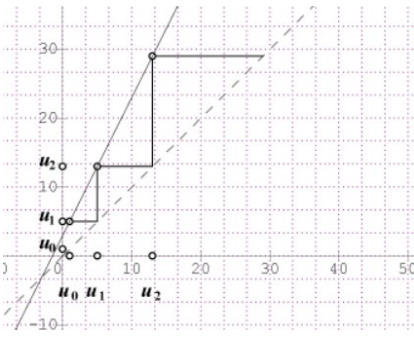
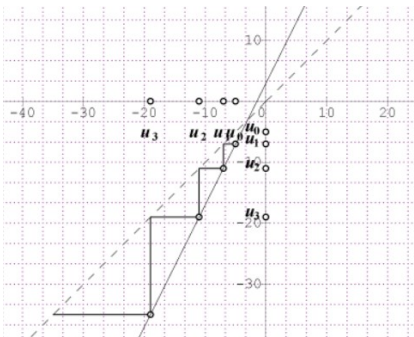
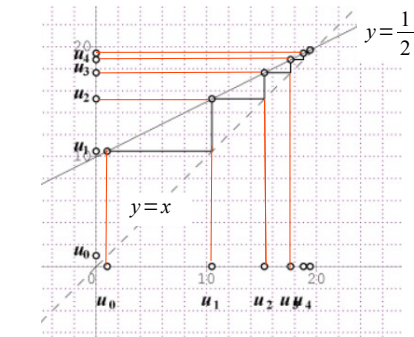
Étape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses

Étape 4 : On place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées

Étape 5 : On reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$

et ainsi de suite ... pour obtenir $u_2, u_3, u_4, \dots$

Dans la pratique, on ne dessine pas tous les traits de construction et on se contente de mettre en évidence les variations et les limites.

$u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$	$u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = -5$	$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$ et $u_0 = 1$
		
La suite est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	La suite est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	La suite est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$ 20 est l'abscisse du point d'intersection des deux droites.