**Calculatrice :**

Radian, degré, arcsin,arccos

# Prépa bac : trigonométrie

Nll Calédonie fev 2018 ex 2

Equations trigos,complexe

**Exercice 2** (5 points)
**Commun à tous les candidats**

Soient les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

On pose :

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de $Z$.
2. Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.
3. Écrire $Z$ sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. On admet que :
   - $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   - pour tous réels $a$ et $b$, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.

   Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ :

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$

Centre étranger 2017 ex 4

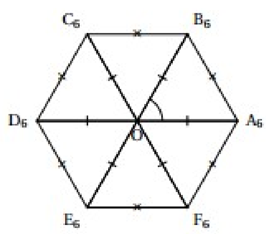
Trigo collège, une fonction trigo , algorithme, calculatrice (radian, degré, arcsin,arccos)

**Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère $P_n$ un polygone régulier à $n$ côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1.
On admet qu'un tel polygone est constitué de $n$ triangles superposables à un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ donné, isocèle en O.
On note $r_n = \mathrm{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet $\mathrm{A}_n$ d'un tel polygone.

**Partie A : étude du cas particulier $n = 6$**

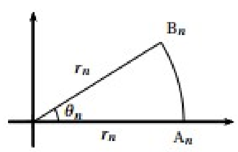
On a représenté ci-contre un polygone $P_6$.




1. Justifier le fait que le triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de $r_6$ la hauteur du triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ issue du sommet $\mathrm{B}_6$.
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

**Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$**

Dans cette partie, on considère le polygone $P_n$ avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point $\mathrm{A}_n$ soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe $r_n$.
On note alors $r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ l'affixe de $\mathrm{B}_n$ où $\theta_n$ est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.




1. Exprimer en fonction de $r_n$ et $\theta_n$ la hauteur issue de $\mathrm{B}_n$ dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone $P_n$ est égale à 1.
   Donner, en fonction de $n$, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}, \overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

**Partie C : étude de la suite $(r_n)$**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre $r_n$, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction $f$ par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

1. Montrer que la suite $(r_n)$ est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$.
2. En déduire que la suite $(r_n)$ converge. On ne demande pas de déterminer sa limite $L$, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme suivant.

| | |
|---|---|
| VARIABLES : | $n$ est un nombre entier |
| TRAITEMENT : | $n$ prend la valeur 4 |
| | Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire |
| | $n$ prend la valeur $n+1$ |
| | Fin Tant que |
| SORTIE : | Afficher $n$ |

Quelle valeur numérique de $n$ va afficher en sortie cet algorithme ?

Polynésie sept 2017 ex 3

Complexe, inégalité et trigonométrie - prise d'initiative

**EXERCICE 3** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

On rappelle que pour tout réel $a$ et tout réel $b$,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel $\theta$ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.
2. Soit $M$ un point du plan complexe d'affixe $z$ non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de $z$ et $\theta = \arg(z)$ un argument de $z$ ; les nombres $\rho$ et $\theta$ sont appelés coordonnées polaires du point $M$.

   Montrer que le point $M$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[ \text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.

Métropole juin 2016 ex 4

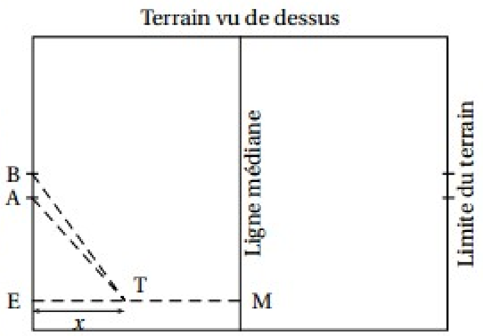
La fonction tangente

**EXERCICE 4** **5 POINTS**

**Commun à tous les candidats**

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.




Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note $x$ la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m. On note $\alpha$ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, $\beta$ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et $\gamma$ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de $x$.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure $\gamma$ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

   On admet que, pour tous réels $a$ et $b$ de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

   $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

   Montrer que $\tan\gamma = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$.
4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure $\gamma$ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle ]0 ; 50] de la fonction $f$ définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur de $x$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de $x$ au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019 : ex 3

A justifier - équation trigonométrique

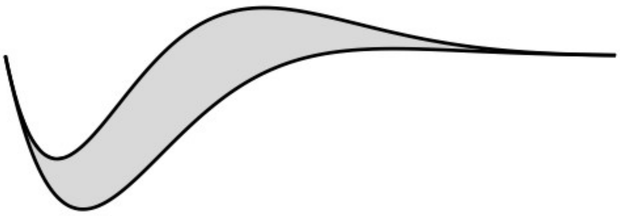
**4.** On considère l'équation d'inconnue le nombre réel $x$

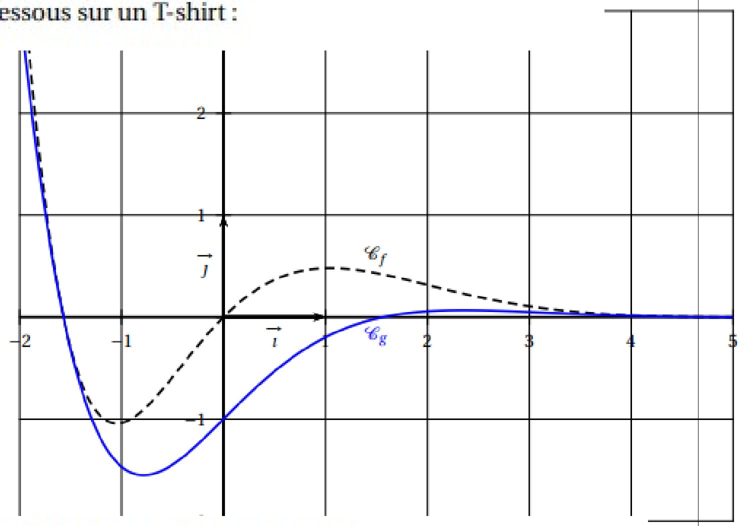
$$\sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right) = 0.$$

**Affirmation 4** : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$ ; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et $\pi$.

| |
|---|
| Antilles-Guyane 29 19 juin 2018 : ex 3 |
| Etude de fonctions – Déterminer une aire – inéquations trigonométriques |

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :






Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

**Partie A — Étude de la fonction $f$**

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où $f'$ est la fonction dérivée de $f$.
4. Dans cette question, on étudie la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
   **a.** Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
   **b.** En déduire les variations de $f$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

**Partie B — Aire du logo**

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

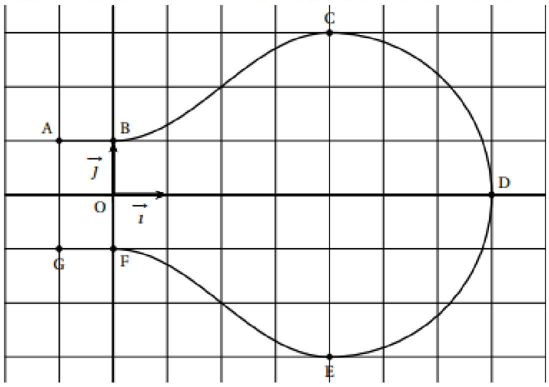
1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $H$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
On admet que $H$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   **a.** Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   **b.** Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près en $\mathrm{cm}^2$.

Etude de fonctions – Déterminer une aire, un volume– équations trigonométriques – formules trigonométriques - algo

Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

**Partie A - Modélisation de la forme de l'ampoule**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points A(−1 ; 1), B(0 ; 1), C(4 ; 3), D(7 ; 0), E(4 ; −3), F(0 ; −1) et G(−1 ; −1).
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :




La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante $h$ définie sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ par $h(x) = 1$ ;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels non nuls fixés et où le réel $c$ appartient à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

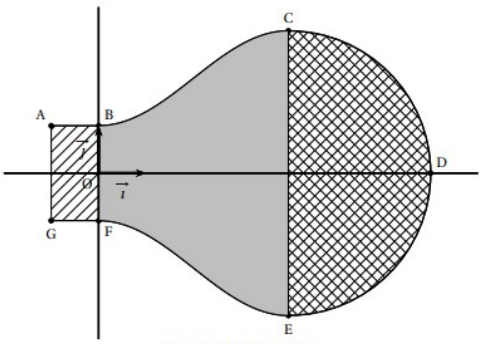
1. a. On appelle $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0 ; 4]$, déterminer $f'(x)$.

   b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction $f$ soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel $c$.

2. Déterminer les réels $a$ et $b$.

**Partie B - Approximation du volume de l'ampoule**

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule.
Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-dessous :




Vue dans le plan (BCE)

On rappelle que :

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où $r$ est le rayon du disque de base et $h$ est la hauteur;
- le volume d'une boule de rayon $r$ est donné par la formule $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

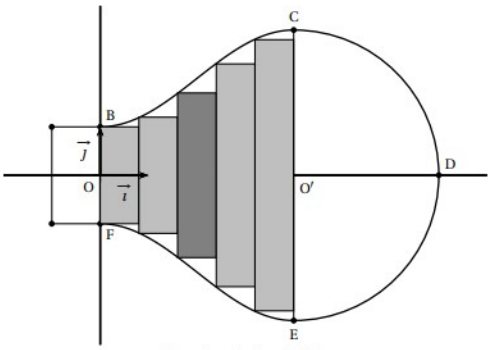
On admet également que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

**1.** Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.

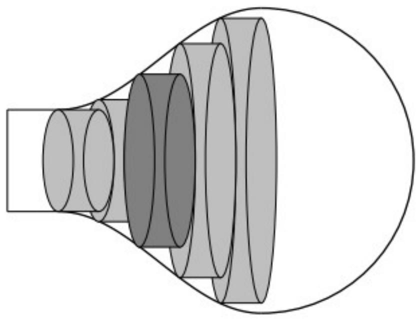
**2.** Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE].

**3.** Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment [OO′] en $n$ segments de même longueur $\dfrac{4}{n}$ puis on construit $n$ cylindres de même hauteur $\dfrac{4}{n}$.

**a. Cas particulier :** dans cette question uniquement on choisit $n = 5$.
Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis en donner la valeur arrondie à $10^{-2}$.



Vue dans le plan (BCE)


Vue dans l'espace

**b. Cas général :** dans cette question, $n$ désigne un entier naturel quelconque non nul.
On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des $n$ cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de $n$ suffisamment grande.
Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable $V$ contienne la somme des volumes des $n$ cylindres créés lorsque l'on saisit $n$.

```
V ← 0
Pour k allant de ... à ... :
    | V ← ...
Fin Pour
```