Prépa bac : probabilité (problème moins classiques)

Calculatrice :
Loi binomiale, loi normale (inverse normale) , u_α , proba cumulées, tableur (trouver un effectif pour la loi binomiale)

Amérique du sud nov 2016 ex 1
Une autre densité de probabilité

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\,;+\infty[$.

On considère les points A(0,5 ; 1) et B(0 ; −1) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

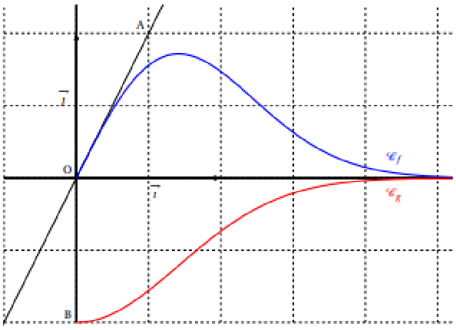
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0\,;+\infty[$

2. a. On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B(0 ; −1) est une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
   a. Déterminer l'expression de $g(x)$.
   b. Soit m un réel strictement positif.
   Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de m.
   c. Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} I_m$.
4. a. Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$.
   b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $P(X \leqslant x) = g(x)+1$.
   c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.
   d. Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha\,;0)$ en laissant apparents les traits de construction.
   Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.

Annexe 1 (Exercice 1) :



Amérique du sud nov 2017 ex 3
Avec un histogramme, centre des classes, intervalle de fluctuation (à 5 %, à 1%) à définir seul.

EXERCICE 3 **3 points**

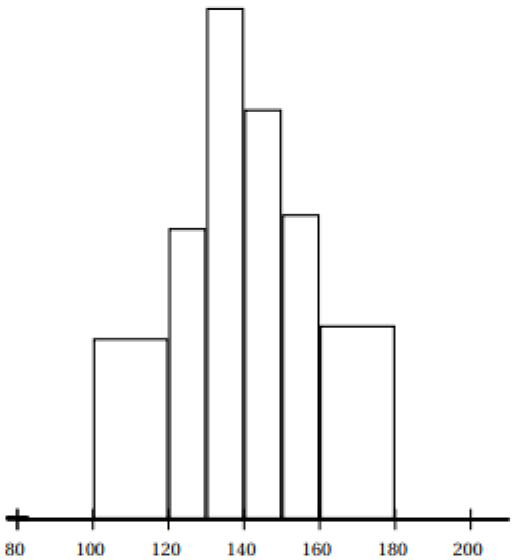
Commun à tous les candidats

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur 10 000 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.

Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous

Nombre de bactéries (en milliers)	[100 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 180[
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711



À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1. **a.** Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.
   b. On note $p = P(X \geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.
2. Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie ; 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.
   a. L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.
   b. Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de 0,01 de se tromper ?

Métropole sept 2017 ex 3
Loi normale, arbre, probabilités conditionnelles , intervalles de fluctuation et de confiance (effectif minimal)

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés seront arrondis au millième

1. Une étude effectuée sur une population d'hommes âgés de 35 à 40 ans a montré que le taux de cholestérol total dans le sang, exprimé en grammes par litre, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1,84$ et d'écart type $\sigma = 0,4$.

   a. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre 1,04g /L et 2,64 g/L.

b. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol supérieur à 1,2 g/L.

2. Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.

Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).

On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.

On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.

On ne constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.

On choisit au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :

- M l'évènement « le patient a pris le médicament » ;
- B l'évènement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».

a. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité de l'évènement B.

c. Calculer la probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé.

3. Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.

Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.

b. L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.

Que peut-on en conclure ?

c. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37 % de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30 %.

Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

Métropole juin 2017 ex 4
Avec des suites, arbre, probas conditionnelles, tableur, évolution à long terme

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

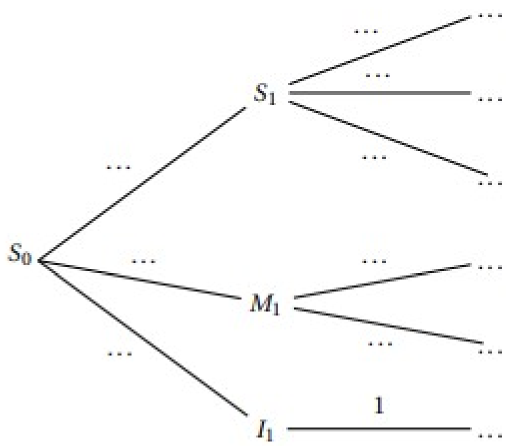
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \ ; \ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$.
2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?

Centre étranger juin 2017 ex 1

QCM – Loi normale (symétrie de la courbe), loi binomiale, loi exp, arbre, probabilités conditionnelles, amplitude de l'intervalle de confiance

Exercice I 5 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leqslant 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes »?

Réponse a : 0,04
Réponse b : 0,96
Réponse c : 0,98
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,05$.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés?

Réponse a : 0,72
Réponse b : 0,28
Réponse c : 0,54
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B.
Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,02$.
Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B?

Réponse a : 0,02
Réponse b : 0,67
Réponse c : 0,44
Réponse d : 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours?

Réponse a : 0,45
Réponse b : 1
Réponse c : 0,55
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à $0,05$. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger?

Réponse a : 40
Réponse b : 400
Réponse c : 1600
Réponse d : 20

Asie juin 2017 ex 5
Divers , Roc (loi exp), Utiliser le bon intervalle, Calculatrice (proba cumulées)

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Question préliminaire
Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = e^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près

Partie A : étude d'un exemple

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.
Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.
On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.
Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.
Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.
On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.
   Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 %?*

Asie juin 2016 ex 1
Vrai/faux à justifier + loi normale (interprétation géométrique) +Calculatrice (proba cumulées)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

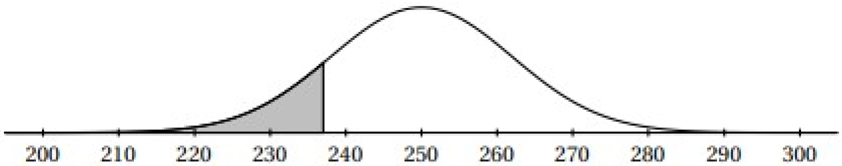
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».
2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.
   - **a.** Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
   - **b.** Démontrer que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.
   - **c.** En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.
3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.
   - **a.** Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\ ;\ 250 + n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.
   - **b.** On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.